

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

**АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ.  
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА**

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ ДО ТИПОВОЇ РОЗРАХУНКОВОЇ  
РОБОТИ  
ДЛЯ СТУДЕНТІВ І КУРСУ ТЕХНІЧНИХ ФАКУЛЬТЕТІВ

*Затверджено Методичною радою НТУУ «КПІ»*

Київ  
«ПОЛІТЕХНІКА»  
2001

Аналитична геометрія. Лінійна алгебра: Збірник завдань до типової розрахункової роботи для студентів I курсу факультетів електронного профілю / Уклад.: Н.Р. Коновалова, Г.Г. Барановська, І.О. Федотова та ін. — К.: ІВЦ «Політехніка», 2001. — 65 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ «КПІ»

(Протокол № від )

Навчальне видання

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ  
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Збірник завдань до типової розрахункової роботи  
для студентів I курсу технічних факультетів

Укладачі: Коновалова Наталія Романівна  
Барановська Галина Григорівна  
Федотова Ірина Олексіївна  
Алексеева Ірина Віталіївна  
Дем'яненко Ольга Олегівна  
Кіндибалюк Адріана Юріївна  
Нефьодова Галина Дмитрівна  
Трофимчук Олена Петрівна  
Гайдей Віктор Олександрович

Відповідальний редактор: В.В. Булдигін — д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент: В.Г. Лозовик — канд. фіз.-мат. наук, доц.

Темплан 2001, поз.

Підп. до друку 00.00.01. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Папір . Друк офс.

Ум. друк. арк. Обл.-вид. арк. Зам. № . Наклад 200 пр.

Інформаційно-видавничий центр «Політехніка»

Друкарня НТУУ «КПІ»

03056, Київ-56, просп. Перемоги, 37

## Вступ

При вивченні курсу «Аналітична геометрія та лінійна алгебра» студенти знайомляться з основними положеннями теорії визначників, систем лінійних алгебраїчних рівнянь, векторної алгебри та ін. Навчальним планом даної дисципліни передбачено також набування студентами навичок виконання ряду типових завдань.

Даний збірник підготовлено з метою організації регулярної роботи студентів по вивченню курсу. Кожен студент розв'язує задачі одного з 30 запропонованих варіантів завдань. Крім того, збірник містить додаткові задачі, які обираються і розв'язуються за бажанням студента.

## Варіант 1

1. Обчислити визначник:

$$\begin{array}{l} \text{а) зведенням до три-} \\ \text{кутного вигляду;} \\ \text{б) методом розкладу} \\ \text{за елементами деяко-} \\ \text{го рядка або стовпця.} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 4x + 5.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

$$\text{а) } A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}; \text{ б) } A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{array}{l} \text{а) за формулами} \\ \text{Крамера;} \\ \text{б) методом Гаусса.} \end{array} \begin{cases} x + 2y - z = 13, \\ 2x + 3y + z = 16, \\ x + y + 4z = -1. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{i}} = x_{\zeta, \hat{i}} + x_{\div, \hat{i}},$$

де  $x_{\zeta, \hat{i}}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{i}}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, \hat{i}}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 5. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(1; 3; 6)$ ,  $M_2(2; 2; 1)$ ,  $M_3(-1; 0; 1)$ ,  $M_4(-4; 6; -3)$ .

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (3; -2; 1)$ ,  $\vec{q} = (-1; 1; -2)$ ,  $\vec{r} = (2; 1; -3)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (11; -6; 5)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює гострий кут з віссю  $Ox$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 1$ ,  $|\vec{q}| = 2$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$ . Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{a}$  на  $\vec{b}$ .

9. Дано точки  $A(2; -1)$ ,  $B(4; 5)$ ,  $C(-3; 2)$ . У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двограний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площиною  $Oyz$ ; площиною, що проходить через точку  $(0;0;1)$  паралельно площині  $Oxy$ ; площиною, що проходить через точку  $(1;2;0)$  і містить вісь  $Oz$ ; площиною, що проходить через точку  $(0;3;0)$  і пряму

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{-3} = \frac{z-4}{0}.$$

Зобразити піраміду графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(2;3;1)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3};$$

$$l_2 : \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь  $b = 15$  та один з фокусів  $F(-10;0)$ ;

б) гіперболи, якщо дійсна піввісь  $a = 13$ , ексцентриситет  $\epsilon = \frac{14}{13}$ ;

в) параболи, якщо її директриса  $D : x = -4$ ;

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 - y^2 = 8z.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x + y + z = 4, x = 2, y = 3,$$

$$x = 0, y = 0, z = 0.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої  $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ z = 0 \end{cases}$  навколо осі  $Ox$ . Зробити рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1 + x_2; 2x_1 + x_3; 3x_1 - x_2 + x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1; x_2 + 1; x_3 + 2).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.  $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -10 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ .

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

## Варіант 2

1. Обчислити визначник:

$$\begin{array}{l} \text{а) зведенням до три-} \\ \text{кутного вигляду;} \\ \text{б) методом розкладу} \\ \text{за елементами деяко-} \\ \text{го рядка або стовпця.} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$  :

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 6x - 1.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

$$\text{а) } A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \text{ б) } A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{array}{l} \text{а) за формулами} \\ \text{Крамера;} \\ \text{б) методом Гаусса.} \end{array} \begin{cases} 3x + 2y + z = 13, \\ x - 2y + z = -3, \\ 4x - y + z = 6. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{1}} = x_{\zeta, \hat{1}} + x_{\div, \hat{1}},$$

де  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, \hat{1}}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(-4; 2; 6)$ ,  $M_2(2; -3; 0)$ ,  $M_3(-10; 5; 8)$ ,  $M_4(-5; 2; -4)$ .

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overline{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (2; 1; 0)$ ,  $\vec{q} = (1; -1; 2)$ ,  $\vec{r} = (2; 2; -1)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (3; 7; -7)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює гострий кут з віссю  $Ox$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$  і  $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 4$ ,  $|\vec{q}| = 1$ ,  $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{4}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{a}$  на  $\vec{b}$  ( $\vec{a} \cdot \vec{b} / |\vec{b}|$ ).

9. Дано точки  $A(-1; 2)$ ,  $B(3; -1)$ ,  $C(0; 4)$ .

У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площиною  $Oxy$ ; площиною  $Oyz$ ; площиною, що проходить через точки  $(0;0;3)$  і  $(0;1;0)$  паралельно осі  $Ox$ ; площиною, що проходить через точку  $(0;0;3)$  і пряму  $\frac{x-2}{-4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{3}$ .

Зобразити піраміду графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(1;2;\frac{3}{2})$  та прямі

$$l_1 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+1}{2};$$

$$l_2 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь  $b = 2$  і один з фокусів  $F(4\sqrt{2};0)$ ;

б) гіперболи, якщо дійсна піввісь  $a = 7$ , ексцентриситет  $\epsilon = \frac{\sqrt{85}}{7}$ ;

в) параболи, якщо її директриса  $D : x = 5$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 + 4y^2 = 16z.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = x^2 + y^2, x + y = 4,$$

$$x = 0, y = 0, z = 0.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої  $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$  навколо осі  $Ox$ . Зробити рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (0; x_2 - x_3; 0)$$

$$B\vec{x} = (3x_1 + 5x_3; x_1 + x_2 + 1; 3x_2 - 6x_3).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$\begin{aligned} & -11x_1^2 - 6x_2^2 - 6x_3^2 + \\ & + 12x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3. \end{aligned}$$

### Варіант 3

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;  
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовця.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ -1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -3 & 8 \\ 0 & -3 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}, f(x) = x^2 + 7x - 2.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;  
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 8, \\ x + y - z = 2, \\ x - y + 4z = 10. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{i}} = x_{\zeta, \hat{i}} + x_{\div, \hat{i}},$$

де  $x_{\zeta, \hat{i}}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{i}}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, \hat{i}}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 - 2x_4 = 9. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(7; 2; 4)$ ,  $M_2(7; -1; -2)$ ,  $M_3(-7; -3; 2)$ ,  $M_4(-4; 2; 1)$ .

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overline{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (0; 1; -2)$ ,  $\vec{q} = (3; -1; 1)$ ,  $\vec{r} = (4; 1; 0)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (-5; 9; -13)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює гострий кут з віссю  $Ox$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$  і  $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = \frac{1}{5}$ ,  $|\vec{q}| = 1$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{2}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{b}$  на  $2\vec{a} - \vec{b}$ .

9. Дано точки  $A(0; 5)$ ,  $B(2; 2)$ ,  $C(4; 6)$ . У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:



а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площинами  $Oxy$  та  $Oxz$ ; площиною, що проходить через

прямі:  $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{2} = z-1$  і  $x=t$ ,

$y=2, z=t$ ; площиною, що проходить

через пряму  $\begin{cases} 3x - z - 3 = 0, \\ y = 0, \end{cases}$  паралельно осі  $Oy$ .

Зобразити піраміду графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(1; 0; 4)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x+1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1};$$

$$l_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса  $E$ , якщо  $A(3; 0), B\left(2; \frac{\sqrt{5}}{3}\right) \in E$ ;

б) гіперболи  $\Gamma$ , якщо рівняння її асимптот  $y = \pm \frac{3}{4}x; A(-8; 0) \in \Gamma$ ;

в) параболи, якщо її директриса  $D : y = -2$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$9x^2 + 4y^2 = 36 - 36z^2.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$2z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 - az = 0, z = 0.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} x^2 = 2py, \\ z = 0 \end{cases} \text{ навколо осі } Ox. \text{ Зробити}$$

рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (3x_1 + 2x_2 - x_3^2; 2x_1 + x_3; 3x_1 - x_2)$$

$$B\vec{x} = (0; 3x_1 - 2x_2; x_1 + x_2 - 3x_3).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

## Варіант 4

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 9x + 10.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 10, \\ 3x - 6y + z = 0, \\ x + 3y + 3z = 13. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{i}} = x_{\zeta, \hat{i}} + x_{\div, \hat{i}},$$

де  $x_{\zeta, \hat{i}}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{i}}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, \hat{i}}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 1. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(2;1;4)$ ,  $M_2(-1;5;-2)$ ,  $M_3(-7;-3;2)$ ,  $M_4(-6;-3;6)$ .

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (0;5;1)$ ,  $\vec{q} = (3;2;-1)$ ,  $\vec{r} = (-1;1;0)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (-15;5;6)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює гострий кут з віссю  $Ox$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$  і  $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 4$ ,  $|\vec{q}| = \frac{1}{2}$ ,  $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{5\pi}{6}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{a}$  на  $\vec{b}$ .

9. Дано точки  $A(3;1)$ ,  $B(5;4)$ ,  $C(1;3)$ . У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площиною, що проходить через осі  $Ox$  і  $Oz$ ; площиною, що проходить через прями  $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{3}$  і  $x = \frac{y-3}{-2} = z$ ; площиною  $Oyz$ ; площиною, що проходить через точки  $(0;0;2)$  і  $(0;3;0)$  паралельно осі  $Ox$ .

Зобразити піраміду графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(-1;3;1)$  та прями

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{1};$$
$$l_2 : \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса  $E$ , якщо ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{\sqrt{21}}{5}$ ,  $A(-5;0) \in E$ ;

б) гіперболи  $\Gamma$ , якщо  $A(\sqrt{80};3)$ ,  $B(4\sqrt{6};3\sqrt{2}) \in \Gamma$ ;

в) параболи, якщо її директриса  $D : y = 1$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z^2 = x^2 + y^2, x^2 + y^2 - ax = 0.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases} \text{ навколо осі } Ox. \text{ Зробити}$$

рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (6x_2 - x_3; 5x_1 + x_2 - x_3; 4x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + x_2 + 2; 3x_1 - x_3; x_2 + 3x_3).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 6 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3.$$

## Варіант 5

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 + 8x + 7.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y - 4z = -2, \\ x + 2y + z = 11, \\ 3x + y + z = 14. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{1}} = x_{\zeta, \hat{1}} + x_{\div, \hat{1}},$$

де  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, \hat{1}}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(-1; -5; 2)$ ,  $M_2(-6; 0; -3)$ ,  $M_3(3; 6; -3)$ ,  $M_4(-10; 6; 7)$ .

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (2; 1; 0)$ ,  $\vec{q} = (1; -1; 2)$ ,  $\vec{r} = (3; 7; -7)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (2; 2; -1)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює гострий кут з віссю  $Ox$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$  і  $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 2$ ,  $|\vec{q}| = 3$ ,  $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{3\pi}{4}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{d}_b(-2\vec{a} + 3\vec{b})$ .

9. Дано точки  $A(3; 1)$ ,  $B(4; 5)$ ,  $C(2; 0)$ . У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: координатними площинами; площиною, що проходить через прямі  $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{3} = z$  і

$x = -t - 1, y = t + 3, z = t + 2$ ; площиною, що перпендикулярна до площини  $Oxz$  і відтинає на осях  $Ox$  і  $Oz$  відрізки 2 і 3.

Зобразити піраміду графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(-1; 3; 3)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1};$$
$$l_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь  $a = 11$ , ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{\sqrt{57}}{11}$ ;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот  $y = \pm \frac{2}{3}x$  і фокусна відстань  $2c = 10\sqrt{13}$ ;

в) параболи  $\Pi$ , якщо вісь симетрії  $Ox$ ,  $A(27; 9) \in \Pi$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 - y^2 + z^2 = 4.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 = 2ax, z = x, z = 3x.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої  $\begin{cases} y^2 = 2px, \\ z = 0 \end{cases}$  навколо осі  $Ox$ . Зробити рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1 - 3x_2^2; 5x_2 - x_3; 4x_1 - x_2)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + 2x_2; 2x_2 - x_3; 5x_1 - x_2 - 2x_3).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ .  $A = \begin{vmatrix} -1 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 10 & -1 \end{vmatrix}$  Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-x_1^2 - 5x_2^2 - 10x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

## Варіант 6

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} 12 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 10x - 12.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -6 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y - 5z = -12, \\ 2x + 4y + z = 13, \\ 3x + y - 3z = -4. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, i} = x_{\zeta, i} + x_{\div, i},$$

де  $x_{\zeta, i}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, i}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, i}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 9, \\ 12x_1 + 15x_2 - 10x_3 + 9x_4 = 10, \\ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 - 7x_4 = -8. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(0; -1; -1)$ ,  $M_2(-2; 3; 5)$ ,  $M_3(1; -5; -9)$ ,  $M_4(-1; -6; 3)$ .

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overline{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (1; 2; 0)$ ,  $\vec{q} = (2; -1; 3)$ ,  $\vec{r} = (0; 1; 2)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (2; 0; -1)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює тупий кут з віссю  $Ox$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$  і  $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 2$ ,  $|\vec{q}| = 3$ ,  $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{3}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{a}$  на  $\vec{b}$ .

9. Дано точки  $A(1; 3)$ ,  $B(-2; 1)$ ,  $C(0; -3)$ .

У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площиною  $Oyz$ ; площиною  $Oxy$ ; площиною, що проходить через точку  $(4; -1; 0)$  і відтинає на осях  $Ox$  і  $Oz$  відрізки 2 і 3; площиною, що проходить через точку  $(0; 3; 0)$  і пряму  $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-4}$ .

Зобразити піраміду графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(-1; 0; 1)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-1};$$

$$l_2 : \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь  $b = \sqrt{15}$  і ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{\sqrt{10}}{25}$ ;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот  $y = \pm \frac{3}{4}x$  і дійсна піввісь  $a = 8$ ;

в) параболу  $\Pi$ , якщо її вісь симетрії  $Oy$ ,  $A(4; -8) \in \Pi$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$z^2 - x^2 - 2y = 0.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$2z = x^2 - y^2, z = 0, z = 2.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої  $\begin{cases} x^2 + (y-4)^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases}$  навколо осі  $Ox$ .

Зробити рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_3; x_1 + 2x_2; -7x_1 - 3x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1; x_2 + x_3^3; x_1 - 2x_2 - x_3).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ .  $A = \begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3.$$

## Варіант 7

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 & -1 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -8 & 4 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 + 5x - 4.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 9 & -7 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + 4y - 6z = 0, \\ 2x - 3y + z = 0, \\ 3x - y - z = 2. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{1}} = x_{\zeta, \hat{1}} + x_{\div, \hat{1}},$$

де  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, \hat{1}}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -1, \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 1, \\ 3x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 11x_4 = 0, \\ 5x_1 + 15x_2 + 14x_3 + 21x_4 = -2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(5; 2; 0)$ ,  $M_2(2; 5; 0)$ ,  $M_3(1; 2; 4)$ ,  $M_4(-1; 1; 1)$ . Дове-

сти, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overline{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (0; 1; 2)$ ,  $\vec{q} = (1; 0; 1)$ ,  $\vec{r} = (-1; 2; 4)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (-2; 4; 7)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює тупий кут з віссю  $Ox$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$  і  $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 3$ ,  $|\vec{q}| = 2$ ,  $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{2}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{a}$  на  $\vec{b}$  ( $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ).

9. Дано точки  $A(-3; -2)$ ,  $B(2; 0)$ ,  $C(-1; 1)$ .

У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:



а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площиною  $Oyz$ ; площиною, що проходить через точку  $(0;2;0)$  паралельно площині  $Oxz$ ; площиною, що проходить через точку  $(1;0;3)$  і містить вісь  $Oy$ ; площиною, що проходить через точку  $(0;0;3)$  і пряму  $\frac{x}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z}{2}$ .

Зобразити піраміду графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(0;3;-1)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x+4}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{-2};$$
$$l_2 : \frac{x+5}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-5}{-5}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь  $a = 4$  і один з фокусів  $F(3;0)$ ;

б) гіперболи, якщо уявна піввісь  $b = 2\sqrt{10}$  і один з фокусів  $F(-11;0)$ ;

в) параболи, якщо її директриса  $D : x = -2$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$\frac{x^2}{25} - z^2 - \frac{y^2}{9} = 1.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z^2 = 4(x^2 + y^2), x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої  $\begin{cases} z = \sqrt{1-x^2}, \\ y = 0 \end{cases}$  навколо осі  $Oz$ . Зробити рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (0; x_1 + 4x_3; 4x_1 - x_2 - x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + 3; x_2 + 3x_3; x_1 - 4x_3).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ .  $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -15 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-x_1^2 - 6x_2^2 - 10x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_2x_3.$$

## Варіант 8

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 8x + 9.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -1, \\ 2x - 3y + 4z = 13, \\ 3x + y + z = 10. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{1}} = x_{\zeta, \hat{1}} + x_{\zeta, \hat{1}},$$

де  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -7, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -11. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(2; -1; -2)$ ,  $M_2(1; 2; 1)$ ,  $M_3(5; 0; -6)$ ,  $M_4(-10; 9; -7)$ .

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overline{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (1; 3; 0)$ ,  $\vec{q} = (2; -1; 1)$ ,  $\vec{r} = (0; -1; 2)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (6; 12; -1)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює тупий кут з віссю  $Ox$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = 4\vec{p} + \vec{q}$  і  $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 7$ ,  $|\vec{q}| = 2$ ,  $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{4}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{b}$  на  $(-3\vec{a} + \vec{b})$ .

9. Дано точки  $A(-4; 2)$ ,  $B(3; 3)$ ,  $C(6; 8)$ . У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площинами  $Oxz$  та  $Oyz$ ; площиною, що паралельна осі  $Oy$  і проходить через точки  $(3;0;0)$  і  $(0;0;1)$ ; площиною, що проходить через прями  $x = 2t, y = -3t + 3, z = t$  і  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$ .

Зобразити піраміду графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(3;2;6)$  та прями

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-3}{-1};$$
$$l_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{-3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь  $b = 4$  і один з фокусів  $F(3;0)$ ;

б) гіперболи, якщо дійсна піввісь  $a = 4$ , ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{7}{5}$ ;

в) параболи, якщо її директриса  $D : x = 6$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$4x^2 - 3y^2 + 6z^2 - 18 = 0.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$y = x^2, z = y, z + y = 2.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої  $\begin{cases} x = y, \\ z = 0 \end{cases}$

навколо осі  $Ox$ . Зробити рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (3x_2 - x_3; x_1 + x_3; x_2 - 4x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1; x_2^2 + x_3; -x_1 + x_2).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -8 & 5 & 12 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$4x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

## Варіант 9

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & -10 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 10x + 4.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 11, \\ 4x + 2y + 4z = 14, \\ 3x - y + 5z = 12. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, i} = x_{\zeta, \hat{i}} + x_{\div, i},$$

де  $x_{\zeta, i}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{i}}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, i}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 35, \\ x_1 - x_3 - 2x_4 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 50. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(-2; 0; -4)$ ,  $M_2(-1; 7; 1)$ ,  $M_3(4; -8; -4)$ ,  $M_4(1; -4; 6)$ .

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overline{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (0; 3; 2)$ ,  $\vec{q} = (2; 1; -1)$ ,  $\vec{r} = (1; -1; 1)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (1; -4; 4)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює тупий кут з віссю  $Ox$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = \vec{p} - 4\vec{q}$  і  $\vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 1$ ,  $|\vec{q}| = 2$ ,  $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{6}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{a}$  на  $\vec{b}$ .

9. Дано точки  $A(-3; -1)$ ,  $B(1; -6)$ ,  $C(9; 3)$ .

У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: координатними площинами; площиною, що паралельна осі  $Ox$  і проходить через точки  $(0;3;0)$  і  $(0;0;2)$ ; площиною, що проходить через прямі  $\frac{x}{-3} = \frac{y-3}{0} = \frac{z}{3}$  і  $x = t + 1$ ,  $y = -2t + 1, z = t + 1$ .

Зобразити піраміду графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(4;3;10)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5};$$

$$l_2 : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса  $E$ , якщо  $A(0;\sqrt{3}), B(\sqrt{\frac{14}{3}};1) \in E$ ;

б) гіперболи  $\Gamma$ , якщо ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{8}{7}, A(8;0) \in \Gamma$ ;

в) параболи, якщо її директриса  $D : y = -4$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$4x^2 + 3y^2 - 24z = 0.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 - y^2 = 2az, x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases} \text{ навколо осі } Ox. \text{ Зробити}$$

рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (4x_1 - x_2 + x_3; 0; x_1 - x_2 - x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + x_2; x_2 - x_3; 5).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ .  $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 12 \\ -9 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$2x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

## Варіант 10

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ -5 & -10 & -5 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - x - 2.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = -10, \\ x + 2y - 3z = -14, \\ 2x - y - z = -3. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{i}} = x_{\zeta, \hat{i}} + x_{\div, \hat{i}},$$

де  $x_{\zeta, \hat{i}}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{i}}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, \hat{i}}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(14; 4; 5)$ ,  $M_2(-5; -3; 2)$ ,  $M_3(-2; -6; -3)$ ,  $M_4(-2; 2; -1)$ .

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overline{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (4; 1; 1)$ ,  $\vec{q} = (2; 0; -3)$ ,  $\vec{r} = (-1; 2; 1)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (-9; 5; 5)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює тупий кут з віссю  $Ox$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = \vec{p} + 4\vec{q}$  і  $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 7$ ,  $|\vec{q}| = 2$ ,  $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{3}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{a}$  на  $\vec{b}$ .

9. Дано точки  $A(3; -2)$ ,  $B(1; 5)$ ,  $C(-4; 3)$ .

У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площинами  $Oxy$  та  $Oxz$ ; площиною, що проходить через

пряму  $\begin{cases} 3x + z - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ , паралельно осі

$Oy$ ; площиною, що проходить через точку  $(2; 0; 0)$  і пряму  $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-4}$ .

Зобразити піраміду графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(-1; 0; -6)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1};$$
$$l_2 : \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса  $E$ , якщо ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{7}{8}$ ,  $A(8; 0) \in E$ ;

б) гіперболи  $\Gamma$ , якщо  $A\left(3; -\sqrt{\frac{15}{2}}\right)$ ,  $B\left(\sqrt{\frac{28}{3}}; 2\right) \in \Gamma$ ;

в) параболи, якщо її директриса  $D : y = 4$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 4z.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = a^2,$$

$$y = x, y = 2x, z = 0 (x \geq 0, y \geq 0).$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases} \text{ навколо осі } Oz. \text{ Зробити}$$

рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (5x_1 + 2x_2^2; x_2 - x_3; x_1)$$

$$B\vec{x} = (0; x_1 + 2x_2 + 3x_3; x_2 - 3x_3).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 12 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-6x_1^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

## Варіант 11

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 6x + 19.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

$$\text{а) } A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \text{ б) } A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 31, \\ 2x + y + 2z = 29, \\ 3x - y + z = 10. \end{cases}$$

б) методом Гаусса.

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{i}} = x_{\zeta, \hat{i}} + x_{\div, \hat{i}},$$

де  $x_{\zeta, \hat{i}}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{i}}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, \hat{i}}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2, \\ 6x_1 - x_2 - x_3 + 5x_4 = -2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(1; 2; 0)$ ,  $M_2(3; 0; -3)$ ,  $M_3(5; 2; 6)$ ,  $M_4(8; 4; -9)$ .

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overline{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (0; 4; 1)$ ,  $\vec{q} = (1; 3; -1)$ ,  $\vec{r} = (-2; 0; 1)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (-5; -5; 5)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює гострий кут з віссю  $Oy$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$  і  $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 10$ ,  $|\vec{q}| = 1$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{2}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{a}$  на  $\vec{b}$ .

9. Дано точки  $A(5; 8)$ ,  $B(-2; 9)$ ,  $C(-4; 5)$ . У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:



а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: координатними площинами; площиною, що проходить через точку  $(-2; 3; 4)$  і відтинає на осях  $Oy$  і  $Oz$  відрізки 3 і 4; площиною, що проходить через точки  $(-1; 2; 0)$ ,  $(0; 2; 1)$ ,  $(2; 2; -1)$ .

Зобразити піраміду графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(2; -1; 0)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2};$$

$$l_2 : \frac{x-3}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь  $a = 12$  та ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{\sqrt{22}}{6}$ ;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот  $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}x$  і фокальна відстань  $2c = 10$ ;

в) параболу  $\Pi$ , якщо вісь симетрії  $Ox$  і точка  $A(-7; -7) \in \Pi$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 - 3y^2 + z^2 - 9 = 0.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$y = x^2, x = y^2, z = xy, z = 0.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases} \text{ навколо осі } Oz. \text{ Зробити}$$

рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_2; x_1 - 4x_3; x_1 - x_2 - x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1^3 + x_2; x_1 - x_2; x_3).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ .  $A = \begin{vmatrix} -2 & 7 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

## Варіант 12

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ -14 & -3 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 7x - 2.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 5y - z = 11, \\ x + y - 5z = 11, \\ 5x + y - z = 27. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{1}} = x_{\zeta, \hat{1}} + x_{\div, \hat{1}},$$

де  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, \hat{1}}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 7. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(2; -1; 2)$ ,  $M_2(1; 2; -1)$ ,  $M_3(3; 2; 1)$ ,  $M_4(-4; 2; 5)$ . До-

вести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overline{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (5; 1; 0)$ ,  $\vec{q} = (2; -1; 3)$ ,  $\vec{r} = (1; 0; -1)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (13; 2; 7)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює гострий кут з віссю  $Oy$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q}$  і  $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 5$ ,  $|\vec{q}| = 4$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{b}$  на  $(2\vec{a} - 4\vec{b})$ .

9. Дано точки  $A(-3; -4)$ ,  $B(-4; 3)$ ,  $C(2; 2)$ . У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: координатними площинами; площиною, що проходить через прямі  $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-3}$  і  $\frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$ ; площиною, що проходить через точку  $(2;6;1)$  перпендикулярно до осі  $Oz$ .

Зобразити піраміду графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(1; -1; 1)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-13}{1};$$

$$l_2 : \frac{x-6}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-10}{-1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь  $b = 2$ , ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{5}{\sqrt{29}}$ ;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот  $y = \pm \frac{12}{13}x$  та дійсна піввісь  $a = 13$ ;

в) параболу  $\Pi$ , якщо вісь симетрії  $Ox$  і точка  $A(-5;15) \in \Pi$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 + 4z^2 - 8y = 0.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = x^2 + y^2, z = 2(x^2 + y^2),$$

$$y = x, y^2 = x.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої  $\begin{cases} z = x^2, \\ y = 0 \end{cases}$

навколо осі  $Ox$ . Зробити рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (0; x_1 + 2x_2 + 3x_3; x_2 - 4x_3)$$

$$B\vec{x} = (-x_1 + 2x_2; x_1 + 3; 3x_1 - 2x_3).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ .  $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з задання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-x_1^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

### Варіант 13

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 9 & -5 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 3x - 4.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - 4y + 2z = -12, \\ 2x + 3y + 4z = -2, \\ x - y - 5z = 15. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{i}} = x_{\zeta, \hat{i}} + x_{\div, \hat{i}},$$

де  $x_{\zeta, \hat{i}}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{i}}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, \hat{i}}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -1, \\ 15x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(1;1;2)$ ,  $M_2(-1;1;2)$ ,  $M_3(2;-2;4)$ ,  $M_4(-1;0;-2)$ .

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (0;1;1)$ ,  $\vec{q} = (-2;0;1)$ ,  $\vec{r} = (3;1;0)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (-19;-1;7)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює гострий кут з віссю  $Oy$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$  і  $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 6$ ,  $|\vec{q}| = 7$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{a}$  на  $\vec{b}$ .

9. Дано точки  $A(2;5)$ ,  $B(5;2)$ ,  $C(-3;3)$ . У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней призми, яка обмежена: площиною  $Oxy$ ; площиною, що проходить через точку  $(0;0;3)$  паралельно осям  $Ox$  та  $Oy$ ; площиною, що проходить через точку  $(1;1;0)$  і містить вісь  $Oz$ ; площиною, що проходить через точки  $(0;0;0), (0;0;1), (2;1;0)$ ; площиною, що проходить через точки  $(6;0;0)$  і  $(0;3;0)$  паралельно осі  $Oz$ .

Зобразити призму графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(2; -1; 0)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x-3}{7} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-3};$$

$$l_2 : \frac{x}{-1} = \frac{y-8}{1} = \frac{z-8}{-1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь  $a = 6$  та один з фокусів  $F(-4; 0)$ ;

б) гіперболи, якщо уявна піввісь  $b = 3$  та один з фокусів  $F(7; 0)$ ;

в) параболи, якщо її директриса  $D : x = -7$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$12x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 24 = 0.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 = az, x^2 + y^2 = ax, z = 0.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої  $\begin{cases} z = y, \\ x = 0 \end{cases}$

навколо осі  $Ox$ . Зробити рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1^2 + x_2; -x_3; x_1 - x_2 + x_3)$$

$$B\vec{x} = (4x_3; 0; x_1 - 2x_2 - 2x_3).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ .  $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$3x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

## Варіант 14

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -8 \end{vmatrix}, f(x) = x^2 + 10x + 1.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = -5, \\ x + y - z = -1, \\ 3x + 2y - 3z = -1. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{1}} = x_{\zeta, \hat{1}} + x_{\div, \hat{1}},$$

де  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, \hat{1}}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(2; 3; 1)$ ,  $M_2(4; 1; -2)$ ,  $M_3(6; 3; 7)$ ,  $M_4(7; 5; -3)$ . До-

вести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overline{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (1; 0; 2)$ ,  $\vec{q} = (0; 1; 1)$ ,  $\vec{r} = (2; -1; 4)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (3; -3; 4)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює гострий кут з віссю  $Oy$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}$  і  $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 3$ ,  $|\vec{q}| = 4$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{a}$  на  $\vec{b}$ .

9. Дано точки  $A(6; -2)$ ,  $B(1; 3)$ ,  $C(-4; 0)$ . У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней призми, яка обмежена: площиною  $Oxz$ ; площиною, що проходить через точку  $(0; 3; 0)$  паралельно площині  $Oxz$ ; площиною, що проходить через точку  $(1; 0; 1)$  і містить вісь  $Oy$ ; площиною, що проходить через точки  $(0; 1; 0), (0; 2; 0), (1; 0; 2)$ ; площиною, що проходить через точку  $(-1; 0; 2)$  перпендикулярно до осі  $Oz$ .

Зобразити призму графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(0; -2; -8)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x-6}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-10}{-1};$$

$$l_2 : \frac{x+4}{-7} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь  $b = 7$  і один з фокусів  $F(5; 0)$ ;

б) гіперболи, якщо дійсна піввісь  $a = 11$  та ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{12}{11}$ ;

в) параболи, якщо її директриса  $D : x = 10$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 6 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$2x^2 + 7y^2 + 4z^2 - 28 = 0.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = 4 - y^2, z = y^2 + 2, x = -1, x = 2.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої  $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ z = 0 \end{cases}$  навколо осі  $Ox$ . Зробити рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (-x_3; 4x_1 + x_2 - x_3; x_2 + 2x_3)$$

$$B\vec{x} = (5; x_1 + x_2; -3x_2 + 2x_3).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ .  $A = \begin{vmatrix} 3 & 8 & -12 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-2x_1^2 - 4x_2^2 - 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

## Варіант 15

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 + 2x - 11.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = 10, \\ 3x - y + 4z = 20, \\ x - 2y - 2z = -5. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, i} = x_{\zeta, i} + x_{\div, i},$$

де  $x_{\zeta, i}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, i}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, i}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 9x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 11x_3 + 9x_4 = 3. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(1; 1; -1)$ ,  $M_2(2; 3; 1)$ ,  $M_3(3; 2; 1)$ ,  $M_4(5; 9; -8)$ . Дове-

сти, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overline{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (3; 1; 0)$ ,  $\vec{q} = (-1; 2; 1)$ ,  $\vec{r} = (-1; 0; 2)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (3; 3; -1)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює гострий кут з віссю  $Oy$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$  і  $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 2$ ,  $|\vec{q}| = 3$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{b}$  на  $\vec{a}$ .

9. Дано точки  $A(0; 5)$ ,  $B(6; 2)$ ,  $C(-3; -4)$ . У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:



а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней призми, яка обмежена: площинами  $Oxz$  та  $Oxy$ ; площиною, що проходить через точку  $(1;2;3)$  паралельно площині  $Oyz$ ; площиною, що проходить через лінії перетину площин  $x = 3$  і  $y = 0$  та  $x = 3$  і  $z = 0$ ; площиною, що проходить через точки  $(0;-3;4)$  та  $(1;3;0)$  паралельно осі  $Ox$ .

Зобразити призму графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(2;-1;0)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{1};$$
$$l_2 : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{-3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса  $E$ , якщо точки  $A\left(-\sqrt{\frac{17}{3}}; \frac{1}{3}\right)$ ,  $B\left(\frac{\sqrt{21}}{2}; \frac{1}{2}\right) \in E$ ;

б) гіперболи  $\Gamma$ , якщо рівняння асимптот  $y = \pm \frac{1}{2}x$  та  $A(6;0) \in \Gamma$ ;

в) параболи, якщо її директриса  $D : y = -1$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 8x + 19y + 4 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$12x^2 - 2y - 5z^2 = 0.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = x^2 + y^2, z = x^2 + 2y^2, y = x,$$
$$y = 2x, x = 1.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої  $\begin{cases} z = y^2, \\ x = 0 \end{cases}$

навколо осі  $Oy$ . Зробити рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1; x_2 - x_3; 3x_1 - x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + x_2; x_1 + x_2^2; x_1).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ .  $A = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$3x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 6x_1x_3.$$

## Варіант 16

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 11x + 15.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 2 \\ x - 3y - z = -6 \\ 8x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{1}} = x_{\zeta, \hat{1}} + x_{\div, \hat{1}},$$

де  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, \hat{1}}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 4x_4 = 11, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 8, \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 5. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(1; 5; -7)$ ,  $M_2(-3; 6; 3)$ ,  $M_3(-2; 7; 3)$ ,  $M_4(-4; 8; -12)$ .

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overline{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (2; 0; 3)$ ,  $\vec{q} = (-1; 2; 1)$ ,  $\vec{r} = (1; 1; -1)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (-1; 7; -4)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює тупий кут з віссю  $Oy$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$  і  $\vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 4$ ,  $|\vec{q}| = 1$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{a}$  на  $\vec{b}$ .

9. Дано точки  $A(-4; 0)$ ,  $B(2; 5)$ ,  $C(2; -2)$ . У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней призми, яка обмежена: площинами  $Oyz$  і  $Oxy$ ; площиною, що проходить через точку  $(-2; 0; 3)$  перпендикулярно до осі  $Oz$ ; площиною, що проходить через точки  $(1; 1; -1), (0; 2; 2), (2; 0; 1)$ ; площиною, що проходить через точки  $(2; 0; 0)$  і  $(-2; 6; 0)$  перпендикулярно до площини  $Oxy$ .

Зобразити призму графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(2; 0; -1)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2};$$
$$l_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса  $E$ , якщо ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{3}{5}$ ,  $A(0; 8) \in E$ ;

б) гіперболи  $\Gamma$ , якщо  $A(\sqrt{6}; 0)$ ,  $B(-2\sqrt{2}; 1) \in \Gamma$ ;

в) параболи, якщо її директриса  $D : y = 9$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 - xy + y^2 + x + y = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$3x^2 + 2z^2 = 6y.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 3z.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4, \\ z = 0 \end{cases} \text{ навколо осі } Oy.$$

Зробити рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1 - 2x_3; 0; x_1 + x_2 + x_3)$$

$$B\vec{x} = (2x_1 + x_3; x_2^2; x_1 - x_2 + 2x_3).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-3x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

## Варіант 17

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 12 & -8 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 7y - z = -4, \\ 3x - y + 2z = 13, \\ x + 4y + 3z = 16. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, i} = x_{\zeta, i} + x_{\div, i},$$

де  $x_{\zeta, i}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, i}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, i}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 5, \\ 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 7x_4 = 7. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(-3; 4; -7)$ ,  $M_2(1; 5; -4)$ ,  $M_3(-5; -2; 0)$ ,  $M_4(2; 5; 4)$ .

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (1; 1; 4)$ ,  $\vec{q} = (0; -3; 2)$ ,  $\vec{r} = (2; 1; -1)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (6; 5; -14)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює тупий кут з віссю  $Oy$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = 5\vec{p} + \vec{q}$  і  $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 1$ ,  $|\vec{q}| = 2$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{a}$  на  $\vec{b}$ .

9. Дано точки  $A(-1; -3)$ ,  $B(2; 4)$ ,  $C(3; -1)$ . У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней призми, яка обмежена: площинами  $Oxy$  і  $Oxz$ ; площиною, що проходить через точку  $(1;3;2)$  перпендикулярно до осі  $Oy$ ; площиною, що проходить через вісь  $Oy$  і точку  $(1;0;1)$ ; площиною, що проходить через пряму  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-1}{-2}$  паралельно осі  $Oy$ . Зобразити призму графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(2;2;5)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1};$$

$$l_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{-1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь  $a = 11$  та ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{10}{11}$ ;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот  $y = \pm \frac{\sqrt{11}}{5}x$  та фокусна відстань  $2c = 12$ ;

в) параболу  $\Pi$ , якщо її вісь симетрії  $Ox$ ,  $A(-7;5) \in \Pi$ ;

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$3x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4z.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, (z \geq 0),$$

$$x^2 + y^2 = R(R - 2z)$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої  $\begin{cases} z = 4y^2, \\ x = 0 \end{cases}$  навколо осі  $Oz$ . Зробити рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_2 - 3x_3; 2x_1 + x_2; 4x_1 - 3x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_2 + x_3 + 1; x_1 - x_2; 3x_3).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ .  $A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$x_1^2 + 10x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

## Варіант 18

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;  
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -11 & 0 \\ 7 & 3 & 11 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 9 & -5 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 2x + 1.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;  
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y - z = -3, \\ 2x + 2y + z = -2, \\ x - 3y + 4z = 2. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{1}} = x_{\zeta, \hat{1}} + x_{\div, \hat{1}},$$

де  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, \hat{1}}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 9x_4 = 10 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 13 \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 22x_4 = 23 \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(-1; 2; -3)$ ,  $M_2(4; -1; 0)$ ,  $M_3(2; 1; -2)$ ,  $M_4(3; 4; 5)$ . До-

вести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (1; 0; 4)$ ,  $\vec{q} = (-1; 1; 3)$ ,  $\vec{r} = (1; -2; 0)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (6; -1; 7)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює тупий кут з віссю  $Oy$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = 7\vec{p} - 2\vec{q}$  і  $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = \frac{1}{2}$ ,  $|\vec{q}| = 2$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{2}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{d}_b(2\vec{a} - 3\vec{b})$ .

9. Дано точки  $A(0; -1)$ ,  $B(-2; 5)$ ,  $C(3; 2)$ . В  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней призми, яка обмежена: площинами  $Oxz$  і  $Oxy$ ; площиною, що проходить через точку  $(1; 3; -1)$  паралельно площині  $Oxz$ ; площиною, що проходить через точки  $(4; 0; 0), (0; 1; 3)$  паралельно осі  $Oy$ ; площиною, що проходить через точку  $(1; 1; \frac{3}{2})$  і пряму  $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-3}$ .  
Зобразити призму графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(0; 1; -1)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x+1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3};$$

$$l_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь  $b = 5$  та ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{12}{13}$ ;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот  $y = \pm \frac{1}{3}x$  і дійсна піввісь  $a = 3$ ;

в) параболи  $\Pi$ , якщо вісь симетрії  $Ox$ ,  $A(-9; 6) \in \Pi$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$5x^2 + 12xy + 10y^2 - 6x + 4y - 1 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$16x^2 - y^2 + 32z = 0.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4Rz - 3R^2,$$

$$z^2 \leq 4(x^2 + y^2).$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \\ z = 0 \end{cases} \text{ навколо осі } Oy. \text{ Зробити}$$

рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1 + 2x_2 - x_3; x_2 + 3x_3; 0)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + x_2^2 + x_3; 0; x_1 - x_3).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ .  $A = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з задання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-5x_1^2 - x_2^2 - 8x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

## Варіант 19

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 10 \\ 3 & -14 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 + 16x - 2.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4, \\ 2x - y + z = 5, \\ x + y - 3z = -7. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{1}} = x_{\zeta, \hat{1}} + x_{\zeta, \hat{1}},$$

де  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(4; -1; 3)$ ,  $M_2(-2; 1; 0)$ ,  $M_3(0; -5; 1)$ ,  $M_4(3; 2; 6)$ . До-

вести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (1; 0; 5)$ ,  $\vec{q} = (-1; 3; 2)$ ,  $\vec{r} = (0; -1; 1)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (5; 15; 0)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює тупий кут з віссю  $Oy$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}$  і  $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 3$ ,  $|\vec{q}| = 4$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{a}$  на  $\vec{b}$ .

9. Дано точки  $A(0; 5)$ ,  $B(2; 2)$ ,  $C(4; 6)$ . В  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:



а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: площиною  $Oyz$ ; площиною, що проходить через точку  $(2; 3; 1)$  перпендикулярно до осі  $Ox$ ; площиною, що проходить через точку  $(0; 2; 2)$  і містить вісь  $Ox$ ; площиною, що проходить через точки  $(1; 0; 0), (3; 0; 0), (0; 1; 2)$ ; площиною, що проходить через точку  $(1; 0; 3)$  паралельно площині  $Oxy$ . Зобразити тіло графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(2; 2; 4)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3};$$
$$l_2 : \frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь  $a = 9$  і один з фокусів  $F(7; 0)$ ;

б) гіперболи, якщо уявна піввісь  $b = 6$  і один з фокусів  $F(12; 0)$ ;

в) параболи, якщо її директриса  $D : x = -\frac{1}{4}$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$8x^2 + 34xy + 8y^2 + 18x - 18y - 17 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$3x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36 = 0.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 = R^2, z = 0,$$
$$Rz = 2R^2 + x^2 + y^2.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ z = 0 \end{cases}$  навколо осі  $Ox$ . Зробити рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (-x_1 + x_2; 5; x_2 + x_3)$$

$$B\vec{x} = (3x_1 - x_2; 3x_2; x_2 + 4x_3).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$x_2^2 - 7x_3^3 - x_1x_2 + 2x_2x_3 - 8x_1x_3.$$

## Варіант 20

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 4 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - x + 2.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 6y + 3z = 8, \\ 6x + 3y - z = 34, \\ 3x + y - 6z = 22. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{1}} = x_{\zeta, \hat{1}} + x_{\div, \hat{1}},$$

де  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, \hat{1}}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 - 2x_4 = 9, \\ 3x_1 + 4x_2 - 14x_3 - x_4 = 14, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(1; -1; 1)$ ,  $M_2(-2; 0; 3)$ ,  $M_3(2; 1; -1)$ ,  $M_4(2; -2; -4)$ .

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overline{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (1; 1; 0)$ ,  $\vec{q} = (0; 1; -2)$ ,  $\vec{r} = (1; 0; 3)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (2; -1; 11)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює тупий кут з віссю  $Oy$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = 10\vec{p} + \vec{q}$  і  $\vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 4$ ,  $|\vec{q}| = 1$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{d}_b(-\vec{a} + 2\vec{b})$ .

9. Дано точки  $A(-1; 2)$ ,  $B(3; -1)$ ,  $C(0; 4)$ . У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней призми, яка обмежена: площинами  $Oxz$  і  $Oyz$ ; площиною, що проходить через точку  $(1;2;2)$  перпендикулярно до осі  $Oz$ ; площиною, що проходить через точку  $(0;-1;4)$  паралельно площині  $Oxy$ ; площиною, що паралельна до осі  $Oz$  і проходить через точки  $(2;0;5)$  і  $(0;3;1)$ . Зобразити призму графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(0;0;-5)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{3};$$

$$l_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь  $b = 5$  та один з фокусів  $F(-10;0)$ ;

б) гіперболи, якщо дійсна піввісь  $a = 9$ , ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{4}{3}$ ;

в) параболи, якщо її директриса  $D : x = 12$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 - 8x - 12y - 5 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$36x^2 - 9y^2 - 4z^2 - 36 = 0.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases} \text{ навколо осі } Oz. \text{ Зробити}$$

рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1 + 2x_2; -3x_3; 4x_1 - x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + x_2; 3x_3; 2x_2 + 1).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ .  $A = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 8 & -3 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 8x_1x_3.$$

## Варіант 21

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 10x - 4.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

$$а) A = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; б) A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - 4y + 2z = 5, \\ 2x + y - 3z = -6, \\ 3x - 2y - z = -2. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, i} = x_{\zeta, i} + x_{\pm, i},$$

де  $x_{\zeta, i}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, i}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\pm, i}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 = 14, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 13x_4 = 23, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 20x_4 = 37, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 19. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(1; 2; 0)$ ,  $M_2(1; -1; 2)$ ,  $M_3(0; 1; -1)$ ,  $M_4(-3; 0; 1)$ .

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (1; 0; 2)$ ,  $\vec{q} = (-1; 0; 1)$ ,  $\vec{r} = (2; 5; -3)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (11; 5; -3)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює гострий кут з віссю  $Oz$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}$  і  $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 8$ ,  $|\vec{q}| = \frac{1}{2}$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{b}$  на  $(-2\vec{a} + 3\vec{b})$ .

9. Дано точки  $A(3; 1)$ ,  $B(5; 4)$ ,  $C(1; 3)$ . У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через точку  $(2; 3; -4)$  і відтинає на осях  $Ox$  і  $Oz$  відрізки 2 і 4; площиною, що проходить через точку  $(0; 1; 0)$  паралельно площині  $Oxz$ . Зобразити тіло графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(3; 0; 2)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x+2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{0};$$
$$l_2 : \frac{x+3}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса  $E$ , якщо  $A(0; -2)$ ,  $B\left(\frac{\sqrt{15}}{2}; 1\right) \in E$ ;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот  $y = \pm \frac{2\sqrt{10}}{9}x$  і один з фокусів  $F(-11; 0)$ ;

в) параболи, якщо її директриса  $D : y = 5$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$y^2 - 4x^2 + z = 0.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = x^2 + y^2, z = 0, y = 1,$$

$$y - 2x, y = 6 - x.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої  $\begin{cases} x^2 = 2z, \\ y = 0 \end{cases}$  навколо осі  $Oz$ . Зробити рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_2 + 3x_3; x_1; 2x_2 - 3x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + x_2; x_1 + 5x_3; x_1^2 + x_2).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 0 & -8 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

## Варіант 22

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}, f(x) = x^2 - 6x + 10.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

$$3.1) A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}; 3.2) A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = -1, \\ x - 3y + 2z = -1, \\ 3x + y + z = 2. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, i} = x_{\zeta, i} + x_{\div, i},$$

де  $x_{\zeta, i}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, i}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, i}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 5x_2 + x_3 - 7x_4 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(1;0;2)$ ,  $M_2(1;2;-1)$ ,  $M_3(2;-2;1)$ ,  $M_4(2;1;0)$ . До-

вести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overline{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (2;0;1)$ ,  $\vec{q} = (1;1;0)$ ,  $\vec{r} = (4;1;2)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (8;0;5)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює гострий кут з віссю  $Oz$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = 3\vec{p} + 4\vec{q}$  і  $\vec{b} = \vec{q} - \vec{p}$ ,  $|\vec{p}| = \frac{5}{2}$ ,  $|\vec{q}| = 2$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{2}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{b}$  на  $(-3\vec{a} + 2\vec{b})$ .

9. Дано точки  $A(3;1)$ ,  $B(4;5)$ ,  $C(2;0)$ . В  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через точку  $(2;1;1)$  і відтинає на осях  $Ox$  і  $Oy$  відрізки 2 і 3; площиною, що проходить через точку  $(1;0;0)$  паралельно площині  $Oyz$ . Зобразити тіло графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(5;3;0)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{-3};$$
$$l_2 : \frac{x}{0} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса  $E$ , якщо ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{2}{3}$ ,  $A(-6;0) \in E$ ;

б) гіперболи  $\Gamma$ , якщо  $A(\sqrt{8};0)$ ,  $B(3;3) \in \Gamma$ ;

в) параболи, якщо її директриса  $D : y = 1$ ;

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$2x^2 + 7y^2 + 4z^2 = 28y.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$y^2 = x, y^2 = 4x, z = 0, z + x = 6.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої  $\begin{cases} z = x^2, \\ y = 0 \end{cases}$

навколо осі  $Oy$ . Зробити рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1 - 2x_2; x_3 + x_1; 6)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + 3x_3; 0; 5x_1 + 6x_2 - 3x_3).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ .  $A = \begin{vmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з задання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-x_1^2 - 8x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

## Варіант 23

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 13 \\ 2 & -23 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 + 24x - 3.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{i}} = x_{\zeta, \hat{i}} + x_{\div, \hat{i}},$$

де  $x_{\zeta, \hat{i}}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{i}}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, \hat{i}}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18, \\ 8x_1 - 4x_2 + 20x_3 - 45x_4 = 28. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(1; 2; -3)$ ,  $M_2(1; 0; 1)$ ,  $M_3(-2; -1; 6)$ ,  $M_4(0; -5; -4)$ .

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overline{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (0; 1; 3)$ ,  $\vec{q} = (1; 2; -1)$ ,  $\vec{r} = (2; 0; -1)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (3; 1; 8)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює гострий кут з віссю  $Oz$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = 7\vec{p} + \vec{q}$  і  $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 3$ ,  $|\vec{q}| = 1$ ,  $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{3\pi}{4}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{d}$  на  $\vec{b}$  ( $3\vec{a} - 2\vec{b}$ ).

9. Дано точки  $A(0; 3)$ ,  $B(-2; -1)$ ,  $C(0; -3)$ . У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;



б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: площинами  $Oxy$   $Oyz$ ; площиною, що проходить через точки  $(2; 0; 0), (-2; 3; 3), (0; 1; 2)$ . площиною, що проходить через точку  $(\frac{4}{3}; 1; 0)$  та вісь  $Oz$ ; площиною, що проходить через точку  $(0; 2; 0)$  паралельно площині  $Oxz$ . Зобразити тіло графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(1; 0; -1)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{1};$$

$$l_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{0}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь  $a = 25$ , ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{2}{5}$ ;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот  $y = \pm \frac{\sqrt{29}}{14}x$  і фокусна відстань  $2c = 30$ .

в) параболи  $\Pi$ , якщо вісь симетрії  $Oy$ ,  $A(4; 1) \in \Pi$ ;

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 12x + 12y - 14 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 + y^2 + 3z^2 = 6x.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = \frac{y^2}{2}, 2x + 3y - 12 = 0,$$

$$x = 0, y = 0, z = 0.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої  $\begin{cases} z = y, \\ x = 0 \end{cases}$

навколо осі  $Oz$ . Зробити рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1; x_2 - 3x_3; x_1 + x_2 - x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_3; 2x_1 - x_3; x_1 - x_3^3).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.  $A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ .

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з задання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-3x_2^2 + 4x_3^2 - x_1x_2 + 10x_1x_3.$$

## Варіант 24

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} 12 & 5 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 10x + 1.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y - 4z = 1, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x - y - z = 6. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, i} = x_{\zeta, i} + x_{\pm, i},$$

де  $x_{\zeta, i}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, i}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\pm, i}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(3; 10; -1)$ ,  $M_2(-2; 3; -5)$ ,  $M_3(-6; 0; -3)$ ,  $M_4(1; -1; 2)$ .

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overline{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (3; 0; 2)$ ,  $\vec{q} = (1; 2; -1)$ ,  $\vec{r} = (-1; 1; 1)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (8; 1; 12)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює гострий кут з віссю  $Oz$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$  і  $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 3$ ,  $|\vec{q}| = 5$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{2\pi}{3}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{b}$  на  $\vec{a}$ .

9. Дано точки  $A(-3; -2)$ ,  $B(2; 0)$ ,  $C(-1; 1)$ . У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що паралельна осі  $Oy$  і відтинає на осях  $Ox$  і  $Oz$  рівні відрізки довжиною 2; площиною, що проходить через точки  $(-2; 5; 3), (0; 0; 3), (2; 5; -3)$ . Зобразити тіло графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(0; 3; 0)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{0};$$

$$l_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-3}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь  $b = 2\sqrt{15}$ , ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{7}{8}$ ;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот  $y = \pm \frac{5}{6}x$  і дійсна піввісь  $a = 6$ ;

в) параболи  $\Pi$ , якщо її вісь симетрії  $Oy$ ,  $A(-2; 3\sqrt{2}) \in \Pi$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 - 4y^2 - z^2 + 4 = 0.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = 9 - y^2, 3x + 4y = 12,$$

$$x = 0, y = 0, z = 0 (y \geq 0).$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої  $\begin{cases} 2y + z = 2, \\ x = 0 \end{cases}$  навколо осі  $Ox$ . Зробити рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (2x_3; x_1 + x_2 - x_3; x_1 + 2)$$

$$B\vec{x} = (x_1; x_2 + 3x_3; 0).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ .  $A = \begin{vmatrix} 6 & 0 & -10 \\ -8 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$5x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

## Варіант 25

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 8 \\ 4 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ 10 & -3 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 9x + 4.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 3y - 4z = 3, \\ 2x + y - z = 3, \\ x + y + 3z = 6. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{1}} = x_{\zeta, \hat{1}} + x_{\div, \hat{1}},$$

де  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, \hat{1}}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 13, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(-1; 2; 4)$ ,  $M_2(-1; -2; -4)$ ,  $M_3(3; 0; -1)$ ,  $M_4(7; -3; 1)$ .

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (1; 4; 1)$ ,  $\vec{q} = (-3; 2; 0)$ ,  $\vec{r} = (1; -1; 2)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (-9; -8; -3)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює гострий кут з віссю  $Oz$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$  і  $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 7$ ,  $|\vec{q}| = 2$ ,  $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{4}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{b}$  на  $(-3\vec{a} + 2\vec{b})$ .

9. Дано точки  $A(-4; 2)$ ,  $B(-2; -2)$ ,  $C(6; 8)$ . У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через точки  $(0;0;1), (-2;3;1), (4;0;-1)$ . площиною, що проходить через точки  $(2;0;0)$  і  $(0;1;0)$  паралельно осі  $Oz$ . Зобразити тіло графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(-1;1;0)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1};$$

$$l_2 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{0}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь  $a = 13$  і один з фокусів  $F(-5;0)$ ;

б) гіперболи, якщо уявна піввісь  $b = 4\sqrt{6}$  і один з фокусів  $F(-7;0)$ ;

в) параболи, якщо її директриса  $D : x = -\frac{3}{8}$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y - 12 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$4x^2 - y^2 - z^2 - 4 = 0.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ z = 0 \end{cases} \text{ навколо осі } Ox. \text{ Зробити}$$

рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_2 - 3x_3; x_1 + 2x_3; x_1 - x_2 - x_3)$$

$$B\vec{x} = (0; x_1 + 5; x_3).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ .  $A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 8 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-5x_1^2 - 5x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

## Варіант 26

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 + 7x + 12.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 5, \\ 2x + 3y - 4z = 11, \\ 3x + y + z = 6. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{1}} = x_{\zeta, \hat{1}} + x_{\div, \hat{1}},$$

де  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, \hat{1}}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(0; -3; 1)$ ,  $M_2(-4; 1; 2)$ ,  $M_3(2; -1; 5)$ ,  $M_4(3; 1; -4)$ .

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (0; 2; 1)$ ,  $\vec{q} = (0; 1; -1)$ ,  $\vec{r} = (5; -3; 2)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (15; -20; -1)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює тупий кут з віссю  $Oz$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = 5\vec{p} - \vec{q}$  і  $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 5$ ,  $|\vec{q}| = 3$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{5\pi}{6}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{b}$  на  $2\vec{a} - \vec{b}$ .

9. Дано точки  $A(-3; 0)$ ,  $B(1; 4)$ ,  $C(3; -1)$ . У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через точку  $(0;0;-3)$  та лінію перетину площин  $2x + 3y - 6 = 0$  і  $Oxy$ ; площиною, що проходить через точку  $(0;0;-2)$  паралельно площині  $Oxy$ ; площиною, що проходить через точку  $(1;0;-2)$  перпендикулярно до осі  $Ox$ . Зобразити тіло графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(4;0;-1)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{3};$$

$$l_2 : \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь  $b = 7$  і один з фокусів  $F(13;0)$ ;

б) гіперболи, якщо уявна піввісь  $b = 4$  і один з фокусів  $F(-11;0)$ ;

в) параболи, якщо її директриса  $D : x = 13$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 + y^2 + 2 = z.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$az = a^2 - x^2 - y^2, z = a - x - y,$$

$$x = 0, y = 0, z = 0.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої  $\begin{cases} xy = a^2, \\ z = 0 \end{cases}$  навколо осі  $Ox$ . Зробити ри-  
сунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1 - 2x_2; x_2 + 3x_3; x_1 - x_2)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + x_3; -x_2; -x_1 - x_3^3).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ .  $A = \begin{vmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & -3 \\ 8 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з задання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

## Варіант 27

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} 10 & -5 \\ -7 & 4 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 14x + 5.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1, \\ x + y + 2z = 2, \\ 2x + 2y + 5z = 3. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{c,i} = x_{c,i} + x_{\pm,i},$$

де  $x_{c,i}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{c,i}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\pm,i}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + x_3 - 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 12x_4 = 2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(1;3;0)$ ,  $M_2(4;-1;2)$ ,  $M_3(3;0;1)$ ,  $M_4(-4;3;5)$ . До-

вести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overline{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (1;0;1)$ ,  $\vec{q} = (1;-2;0)$ ,  $\vec{r} = (0;3;1)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (2;7;5)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює тупий кут з віссю  $Oz$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$  і  $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 2$ ,  $|\vec{q}| = 3$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{a}$  на  $\vec{b}$ .

9. Дано точки  $A(3;-2)$ ,  $B(1;5)$ ,  $C(-4;3)$ .

У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:



а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через точки  $(0; 0; 2), (-1; 2; 3), (1; 1; 1)$ ; площиною, що проходить через пряму  $x = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2}$  перпендикулярно до площини  $Oyz$ . Зобразити тіло графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(1; 4; 0)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{1};$$

$$l_2 : \frac{x}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса  $E$ , якщо  $A(-3; 0)$ ,  $B\left(1; \sqrt{\frac{40}{3}}\right) \in E$ ;

б) гіперболи  $\Gamma$ , якщо рівняння її асимптот  $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}x$ ,  $A(-6; \sqrt{22}) \in \Gamma$ ;

в) параболи, якщо її директриса  $D : y = 4$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 + 10xy + y^2 + 18x - 6y - 16 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$2x^2 + y^2 - 4z = 0.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z^2 = xy, \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, z = 0.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої  $\begin{cases} x+z=2, \\ y=0 \end{cases}$  навколо осі  $Oy$ . Зробити рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1; x_2 + x_3; x_1 + x_2 + 3x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_2; -x_3 + 1; x_1 - x_2).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ .  $A = \begin{vmatrix} 4 & 13 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -3 \end{vmatrix}$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$2x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

## Варіант 28

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} -7 & -5 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 + x + 3.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} 5 & 13 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 8, \\ x - 3y - 5z = 6, \\ 3x + y - 7z = -4. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{1}} = x_{\zeta, \hat{1}} + x_{\zeta, \hat{1}},$$

де  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(-2; -1; -1)$ ,  $M_2(0; 3; 2)$ ,  $M_3(3; 1; -4)$ ,  $M_4(-4; 7; 3)$ . До-

вести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (0; 1; 5)$ ,  $\vec{q} = (3; -1; 2)$ ,  $\vec{r} = (-1; 0; 1)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (8; -7; -13)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює тупий кут з віссю  $Oz$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}$  і  $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = \frac{1}{2}$ ,  $|\vec{q}| = 4$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{5\pi}{6}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{b}$  на  $(-\vec{a} + \vec{b})$ .

9. Дано точки  $A(5; 8)$ ,  $B(-2; 9)$ ,  $C(-4; 5)$ . В  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через пряму  $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{3}$  і точку  $(0;0;-3)$ ; площиною, що проходить через точки  $(0;3;0)$  і  $(0;0;-3)$  паралельно осі  $Ox$ . Зобразити тіло графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(3;-5;0)$  та прямі

$$l_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1};$$
$$l_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z+2}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса  $E$ , якщо ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{5}{6}$ ,  $A(0;-\sqrt{11}) \in E$ ;

б) гіперболи  $\Gamma$ , якщо  $A(\sqrt{\frac{32}{3}};1)$ ,  $B(\sqrt{8};0) \in \Gamma$ ;

в) параболи, якщо її директриса  $D: y = -3$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$2x^2 + 12xy + 2y^2 + 60x + 20y + 51 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y - 1.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 2y,$$

$$z = 0, z = x + 2y.$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої  $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases}$  навколо осі  $Ox$ .

Зробити рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_2 - x_3; 3; x_2 + x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1; 0; x_3).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ .  $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & -7 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

## Варіант 29

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -7 & 9 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 + 3x + 12.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ ; б)  $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{1}} = x_{\zeta, \hat{1}} + x_{\div, \hat{1}},$$

де  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{1}}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, \hat{1}}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 7x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(-3; -5; 6)$ ,  $M_2(2; 1; -4)$ ,  $M_3(0; -3; -1)$ ,  $M_4(-5; 2; -8)$ .

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overline{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (4; 0; 1)$ ,  $\vec{q} = (3; 1; -1)$ ,  $\vec{r} = (0; -2; 1)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (0; -8; 9)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює тупий кут з віссю  $Oz$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$  і  $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 2$ ,  $|\vec{q}| = 1$ ,  $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{3}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{a}$  на  $\vec{b}$ .

9. Дано точки  $A(-3; -4)$ ,  $B(-4; 3)$ ,  $C(2; 2)$ .

У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через прямі  $\frac{x-3}{-3} = \frac{y}{8} = \frac{z}{-2}$  і  $x=0, y=2t, z=2-t$ ; площиною, що проходить паралельно осі  $Oy$  і відтинає на осях  $Ox$  і  $Oz$  рівні відрізки довжиною 2. Зобразити тіло графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(4;1;5)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0};$$

$$l_2 : \frac{x}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь  $a=15$ , ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{13}{15}$ ;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот  $y = \pm \frac{\sqrt{17}}{8}x$  і фокусна відстань  $2c=18$ ;

в) параболу  $\Pi$ , якщо її вісь симетрії  $Oy$ ,  $A(4;-10) \in \Pi$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$z = x^2 + 2y^2 - 2.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = xy, x^2 + y^2 = R^2 (x, y, z \geq 0).$$

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases} \text{ навколо осі } Oy.$$

Зробити рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (5x_3; -x_1 + 2x_2; 0)$$

$$B\vec{x} = (x_1 - x_2 - x_3; x_2^2 + x_1; -x_3).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ .  $A = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-4x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

## Варіант 30

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця  $A$  задовольняє рівняння  $f(x) = 0$ :

$$A = \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 + 3x + 8.$$

3. Для матриці  $A$  знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Результат перевірити.

а)  $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}; A = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ .

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{i}} = x_{\zeta, \hat{i}} + x_{\div, \hat{i}},$$

де  $x_{\zeta, \hat{i}}$  — загальний розв'язок неоднорідної системи;  $x_{\zeta, \hat{i}}$  — загальний розв'язок однорідної системи;  $x_{\div, \hat{i}}$  — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

6. Дано координати точок  $M_1(2; -4; -3)$ ,  $M_2(5; -6; 0)$ ,  $M_3(-1; 3; -3)$ ,  $M_4(-10; -8; 7)$ .

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора  $\overline{M_1M_2}$ ;

б) кут  $\angle M_2M_1M_3$ ;

в) площу  $\Delta M_1M_2M_3$ ;

г) об'єм піраміди  $M_1M_2M_3M_4$ ;

д) висоту піраміди  $M_4H$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори  $\vec{p} = (1; 0; 5)$ ,  $\vec{q} = (3; 2; 7)$ ,  $\vec{r} = (5; 0; 9)$ . Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора  $\vec{a} = (-4; 2; -12)$  в цьому базисі;

б) одиничний вектор  $\vec{c}$ , який ортогональний до векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , якщо вектор  $\vec{c}$  утворює тупий кут з віссю  $Oz$ .

8. Дано вектори  $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$  і  $\vec{b} = 5\vec{p} + \vec{q}$ ,  $|\vec{p}| = 2$ ,  $|\vec{q}| = 3$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{2}$ .

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

в) проекцію  $\vec{a}$  на  $\vec{b}$ .

9. Дано точки  $A(2; 5)$ ,  $B(5; 2)$ ,  $C(-3; -3)$ .

У  $\Delta ABC$  знайти:

а) рівняння медіани  $AM$ , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси  $BF$ ;

в) рівняння висоти  $CD$ , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину  $CD$ ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку  $A$  паралельно до бісектриси  $BF$ .

10. Дано координати точок  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини  $M_1M_2M_3$ ;

б) довжину висоти  $M_4H$ , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки  $M_4$  до площини  $M_1M_2M_3$ ;

в) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно площини  $M_1M_2M_3$ ;

г) точку, симетричну точці  $M_4$  відносно ребра  $M_1M_2$ ;

д) кут між прямою  $M_1M_4$  та площиною  $M_1M_2M_3$ ;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами  $M_1M_2M_4$  та  $M_1M_2M_3$ .

**11.** Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через

пряму  $\begin{cases} x - y = 0, \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$  перпендикулярно до площини  $Oyz$ ; площиною, що

проходить через прямі  $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3}$  і

$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-3}$ . Зобразити тіло графічно.

**12.** Задано точку  $M_0(3; 2; 0)$  та прямі

$$l_1 : \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1};$$

$$l_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{-3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M_0$  на пряму  $l_1$ ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих  $l_1$  і  $l_2$  та найкоротшу відстань між ними.

**13.** Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь  $b = 2\sqrt{2}$ , ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{7}{9}$ ;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот

$$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x \text{ і дійсна піввісь } a = 6;$$

в) параболу  $\Pi$ , якщо вісь симетрії  $Oy$ ,  $A(15; -45) \in \Pi$ .

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

**14.** Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$4xy + 4y + 1 = 0.$$

**15.** Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 - y^2 + z^2 + 4 = 0.$$

**16.** Побудувати тіло, обмежене поверхнями:  $z = 4 - y^2, y = \frac{x^2}{2}, z = 0$ .

**17.** Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} x = 2 - y^2, \\ z = 0 \end{cases} \text{ навколо осі } Oy. \text{ Зробити}$$

рисунок.

**18.** З'ясувати, які із заданих відображень  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (6x_3; -x_2 - x_3; x_1 - 2x_2)$$

$$B\vec{x} = (x_1 - 2x_2; x_2 - 3x_3; 4x_2 + 4).$$

**19.** Знайти власні числа і власні вектори матриці  $A$ . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.  $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ .

**20.** Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

**21.** Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

## Додаткові задачі

1. Розв'язати матричне рівняння:

- 1)  $A_1 X = A_2$ ;                      3)  $A_3 X = A_4$ .  
 2)  $X A_5 A_6 = (1 - 2)$ ;            4)  $A_7 X = A_8$ .

$$A_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}; A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}; A_3 = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix};$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; A_6 = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -7 \end{vmatrix};$$

$$A_5 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, A_7 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, A_8 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Нехай  $A^2 + A + E = 0$ . Довести, що матриця  $A$  невироджена. Вивести формулу для знаходження  $A^{-1}$ .

3. Довести, що довільну матрицю можна зобразити у вигляді симетричної та кососиметричної матриці.

4. Довести:

$$a_{11}^{n-2} \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} & a_{11} a_{13} & \dots & a_{11} a_{1n} \\ a_{21} a_{22} & a_{21} a_{23} & \dots & a_{21} a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{31} a_{32} & a_{31} a_{33} & \dots & a_{31} a_{3n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} & a_{11} a_{13} & \dots & a_{11} a_{1n} \\ a_{n1} a_{n2} & a_{n1} a_{n3} & \dots & a_{n1} a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

5. Обчислити визначник  $\Delta$ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 \\ 1 & 6 & 6^2 & 6^3 \end{vmatrix}. A_9 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

6. Знайти значення багаточлена  $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$  від матриці  $A_9$ .

7. Перевірити формулу:

$$(S^{-1}AS)^n = S^{-1}A^nS.$$

8. Знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ :

$$1) A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$2) A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{vmatrix}.$$

9. Знайти ранг матриці:

$$1) A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$2) A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

10. Знайти значення  $\lambda$ , при яких матриця  $A_{10}$  (завдання 11) має найменший ранг.

11. Знайти ранг матриці  $A_{10}$  при різних значеннях  $\lambda$ .

$$A_{10} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}; A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{vmatrix}.$$

12. Дослідити систему, яка задана розширеною матрицею, при різних значеннях  $\lambda$ .

$$1) A = \left| \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 - \lambda & 1 & -\lambda \\ \lambda & \lambda - 1 & 1 & 2\lambda \\ 4\lambda + 3 & 2\lambda - 1 & \lambda + 4 & 2\lambda + 3 \end{array} \right|.$$



$$2) A = \left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 14 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & \lambda & 7 \end{array} \right\|.$$

$$3) A = \left\| \begin{array}{cccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array} \right\|.$$

13. Які з рядків матриці  $A$ :

$$A = \left\| \begin{array}{ccccc} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & -13 \\ 4 & -2 & -7 & 5 & -7 \end{array} \right\|$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків для однорідної системи рівнянь, з матрицею  $B$ :

$$B = \left\| \begin{array}{ccccc} 2 & -5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right\|.$$

14. Нехай вектори  $\vec{a}$  та  $\vec{b}$  не колінеарні і  $\overline{AB} = \frac{\alpha}{2}\vec{a}$ ,  $\overline{BC} = 4(3\vec{a} - \vec{b})$ ,  $\overline{CD} = 4\beta\vec{b}$ ,  $\overline{DA} = \vec{a} + \alpha\vec{b}$ . Знайти  $\alpha$  і  $\beta$  і довести колінеарність  $\overline{BC}$  та  $\overline{DA}$ .

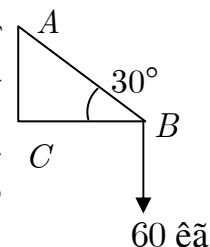
15. Задано два вектори  $\vec{a} = (8; 4; 1)$  та  $\vec{b} = (2; -2; 1)$ . Знайти вектор  $\vec{c}$ , компланарний до векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , ортогональний вектору  $\vec{a}$ , рівний йому за довжиною і утворює з вектором  $\vec{b}$  тупий кут.

16. Визначити параметр  $\lambda$  так, щоб векторний добуток векторів  $\vec{a} = (0; 2; -1)$  і  $\vec{b} = (2; 0; \lambda)$  утворював кут  $\frac{2\pi}{3}$  з прямою  $y = 2x - 2, z = 3x - 1$ .

17. Обчислити в точці  $M(-3; 4; 2)$  напруженість  $\vec{M}$  магнітного поля, утворе-

ного струмом  $\vec{I} = -3\vec{k}$ , який тече вздовж прямолінійного провідника.

18. Вантаж вагою 60 кг підтримується двома стрижнями  $AB$  і  $CB$ . Визначити сили, які виникають в стрижнях, якщо  $\angle ABC = 30^\circ$ .



19. Скласти рівняння бісектриси кута, утвореного прямими  $x - 7y = 1$  та  $x + y = -7$ , всередині якого знаходиться точка  $A(1, 1)$ .

20. При яких значеннях  $B$  та  $D$  пряма  $\begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0 \\ 3x + By + z + D = 0 \end{cases}$  лежить у площині  $Oxy$ .

21. При яких значеннях  $D$  пряма  $\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0 \\ x + 4y - z + D = 0 \end{cases}$  перетинає вісь  $Oz$ .

22. Показати, що прямі  $x = 3z - 4$ ,  $y = z + 2$  та  $\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{1}$  перетинаються. Знайти точку їх перетину.

23. Напрявні косинуси прямої, яка проходить через точку  $M(2; 1; -1)$  пропорційні числам  $3 : 4 : 1$ . Знайти рівняння площини, яка проходить через цю пряму і перпендикулярна до площини  $5x - 3y + 2z - 9 = 0$ .

24. Вивести формулу відстані між двома точками в полярних координатах.

25. Знайти рівняння гіперболи, директриси якої поділяють фокусну відстань на три рівні частини.

26. Скласти рівняння дотичних до кривої  $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y = 16$ , які проходять через точку  $A(3; 3)$ .

27. Визначити тип кривої:

1)  $(3x - 4y)^2 - 5(x + 2y - 1)^2 = 1$ .

2)  $(4x + 3y - 1)^2 + (4x + 3y + 2)^2 = 5$ .