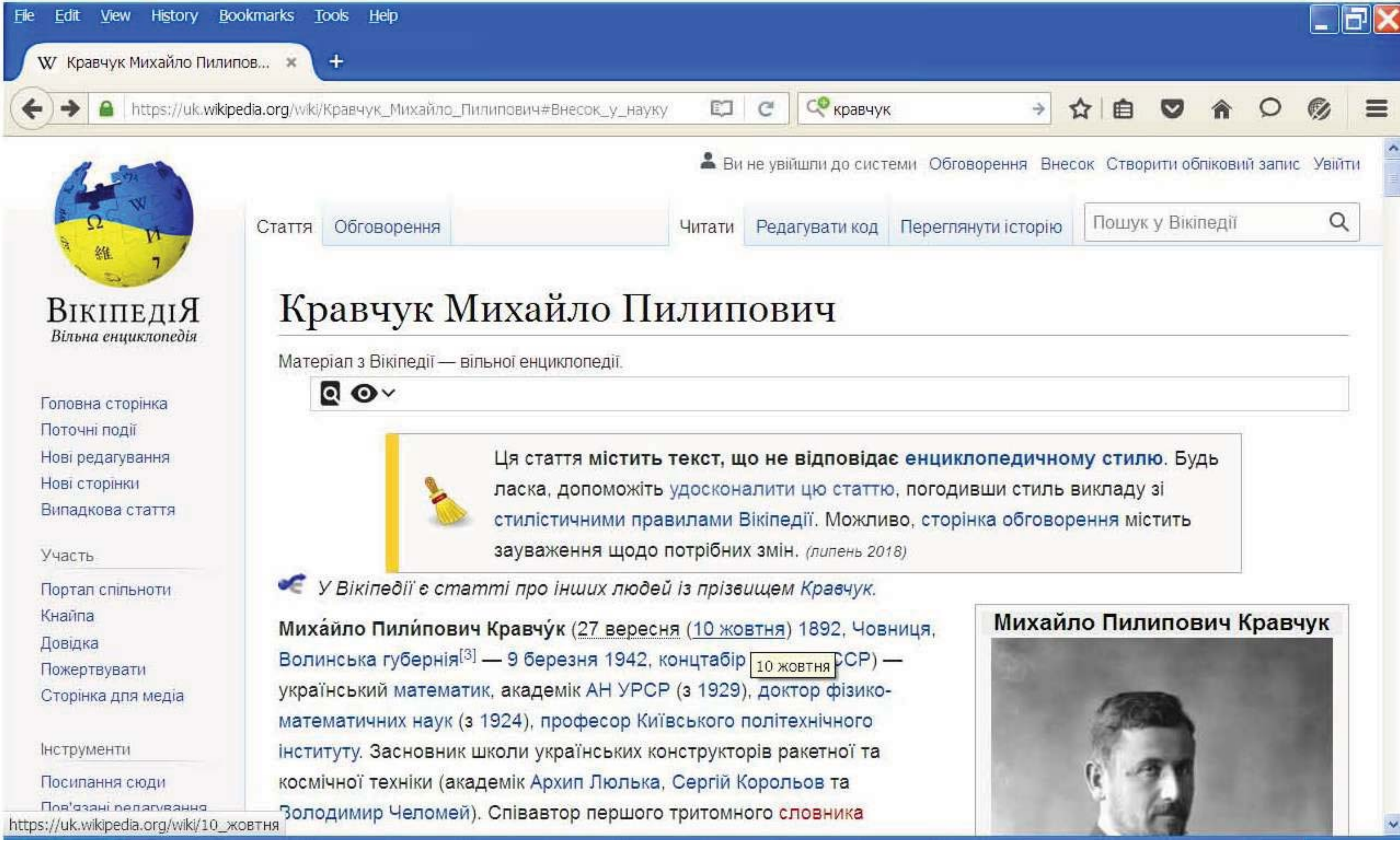
М. П. КРАВЧУК: ПОЛІНОМИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

О. І. Клесов

Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”


File Edit View History Bookmarks Tools Help
Кравчук Михайло Пилипов...
https://uk.wikipedia.org/wiki/Кравчук_Михайло_Пилипович#Внесок_у_науку
кравчук
Ви не увійшли до системи Обговорення Внесок Створити обліковий запис Увійти
Стаття Обговорення
Читати Редагувати код Переглянути історію
Пошук у Вікіпедії
Вікіпедія
Вільна енциклопедія
Головна сторінка
Поточні події
Нові редагування
Нові сторінки
Випадкова стаття
Участь
Портал спільноти
Кнайпа
Довідка
Пожертвувати
Сторінка для медіа
Інструменти
Посилання сюди
Кравчук Михайло Пилипович
Матеріал з Вікіпедії — вільної енциклопедії.
Ця стаття містить текст, що не відповідає енциклопедичному стилю. Будь ласка, допоможіть удосконалити цю статтю, погодивши стиль викладу зі стилістичними правилами Вікіпедії. Можливо, сторінка обговорення містить зауваження щодо потрібних змін. (липень 2018)
У Вікіпедії є статті про інших людей із прізвищем Кравчук.
Миха́йло Пили́пович Кравчу́к (27 вересня (10 жовтня) 1892, Човниця, Волинська губернія[3] — 9 березня 1942, концтабір 10 жовтня СР) — український математик, академік АН УРСР (з 1929), доктор фізико-математичних наук (з 1924), професор Київського політехнічного інституту. Засновник школи українських конструкторів ракетної та космічної техніки (академік Архип Люлька, Сергій Корольов та Володимир Челомей). Співавтор першого тритомного словника
Михайло Пилипович Кравчук
https://uk.wikipedia.org/wiki/10_жовтня

File Edit View History Bookmarks Tools Help

W Кравчук Михайло Пилипов...

https://uk.wikipedia.org/wiki/Кравчук_Михайло_Пилипович#Внесок_у_науку

кравчук

Довідка
Пожертвувати
Сторінка для медіа

Інструменти

Посилання сюди
Пов'язані редагування
Спеціальні сторінки
Постійне посилання
Інформація про сторінку
Цитувати сторінку
Елемент Вікіданих

Друк/експорт

Створити книгу
Завантажити як PDF

В інших проєктах

Вікісховище

Іншими мовами

Català
Čeština
Deutsch
Ελληνικά
English

Волинська губернія[3] — 9 березня 1942, концтабір ГУЛАГ СССР) — український математик, академік АН УРСР (з 1929), доктор фізико-математичних наук (з 1924), професор Київського політехнічного інституту. Засновник школи українських конструкторів ракетної та космічної техніки (академік Архип Люлька, Сергій Корольов та Володимир Челомей). Співавтор першого тритомного словника української математичної термінології.

Зміст [сховати]

Михайло Пилипович Кравчук

Народився	27 вересня 1892[1] Човниця, Луцький повіт, Волинська губернія, Російська імперія[1]
Помер	9 березня 1942[1] (49 років) Колима, СРСР[1]
Країна	Російська імперія УНР Українська Держава

Біографія [ред. код]

Розділи теоретичної і прикладної математики, у яких знайшли своє застосування здобутки Кравчука[10]:

- Випадкові блукання. Симетричні матриці Кравчука та біноміальні сподівання.
- Мартингали. Поліноми Кравчука і мультиноміальні розподіли.
- Алгебри Лі та поліноми Кравчука.
- Групи Лі. Відбиття. Матриці Кравчука та групові елементи.
- Квантова ймовірність та тензорна алгебра. Матриці Кравчука як власні вектори.
- Коефіцієнти Клебша-Гордана та поліноми Кравчука.
- Перетворення Кравчука.
- Поліноми Кравчука як гіпергеометричні функції.
- Гаусові квадратури. Нулі поліномів Кравчука. Сумація Гаусса-Кравчука.
- Теорія кодування.

Укр. матем. ж., 1992, том 44, номер 7, стор. 860–880

BRIEF SURVEY OF THE MATHEMATICAL LEGACY OF ACADEMICIAN M. KRAVCHUK

O. S. Parasyuk and N. O. Virchenko

UDC 51/09

The article presents a brief survey of the principal stages in the life and scientific activity of the outstanding Ukrainian mathematician, M. Kravchuk, Academician of the Ukrainian Academy of Sciences, a victim of the purges in 1938, whose work was unjustly forgotten for many decades.

September 27, 1992 marked the 100th anniversary of the birth of Mikhail Pilipovich Kravchuk, an outstanding Ukrainian mathematician and Academician of the Ukrainian Academy of Sciences who made a fundamental contribution to numerous branches of mathematics (algebra and number theory, theory of functions of a real and a complex variable, theory of differential and integral equations, probability theory and mathematical statistics, etc.). His entire multifaceted creative and public life was closely connected with scientific institutions, institutes of post-secondary and secondary education in Ukraine. In one description delivered in a speech in 1929 to the Academy of Sciences upon Kravchuk's election to the Academy, it was correctly remarked that "... there is no event in the creation of mathematical science (in Ukraine) that has occurred without his involvement .... the first Ukrainian secondary schools in the towns and in the countryside, the first university courses, the

МИХАЙЛО КРАВЧУК

ВИБРАНІ МАТЕМАТИЧНІ ПРАЦІ

Київ — Нью-Йорк
2002

KRAVCHUK ORTHOGONAL POLYNOMIALS

G. Y. Pryzva

UDC 517.58

A survey of the principal works of Academician M. P. Kravchuk and his students in the area of orthogonal polynomials of a discrete variable is presented. The value of these studies for the further development of the theory, for drawing generalization, and for the construction of different applications of this class of special functions is noted.

The name of the outstanding Ukrainian scientist and mathematician, M. P. Kravchuk, will live forever in the world's mathematical literature. He has been immortalized by having a class of orthogonal polynomials of a discrete variable which has been named after him.

The present article represents an attempt at a historical scientific review of the full range of Kravchuk's creativity relating to the discovery and study of what are known as Kravchuk polynomials. The results found by Kravchuk's school in this area are analyzed, and the subsequent course of certain studies in the area of orthogonal polynomials of a discrete variable and various applications of these polynomials are outlined.

It should be noted that the publications from the period 1929—1931, which contain the principal results concerning Kravchuk polynomials, have long since been extremely difficult to locate by readers who might wish to become acquainted with these results in the original.

In 1921—1929 Kravchuk held the post of professor and "chairman of the department of mathematics and variational

Внесок М. П. Кравчука у математику

(за О. С. Парасюком та Н. О. Вірченко)

---

(1) алгебра та теорія чисел

(2) теорія функцій дійсної або комплексної змінної

(3) теорія диференціальних та інтегральних рівнянь

(4) математична статистика та теорія ймовірностей

Розвиток ідей Кравчука

(за О. С. Парасюком та Н. О. Вірченко)

---

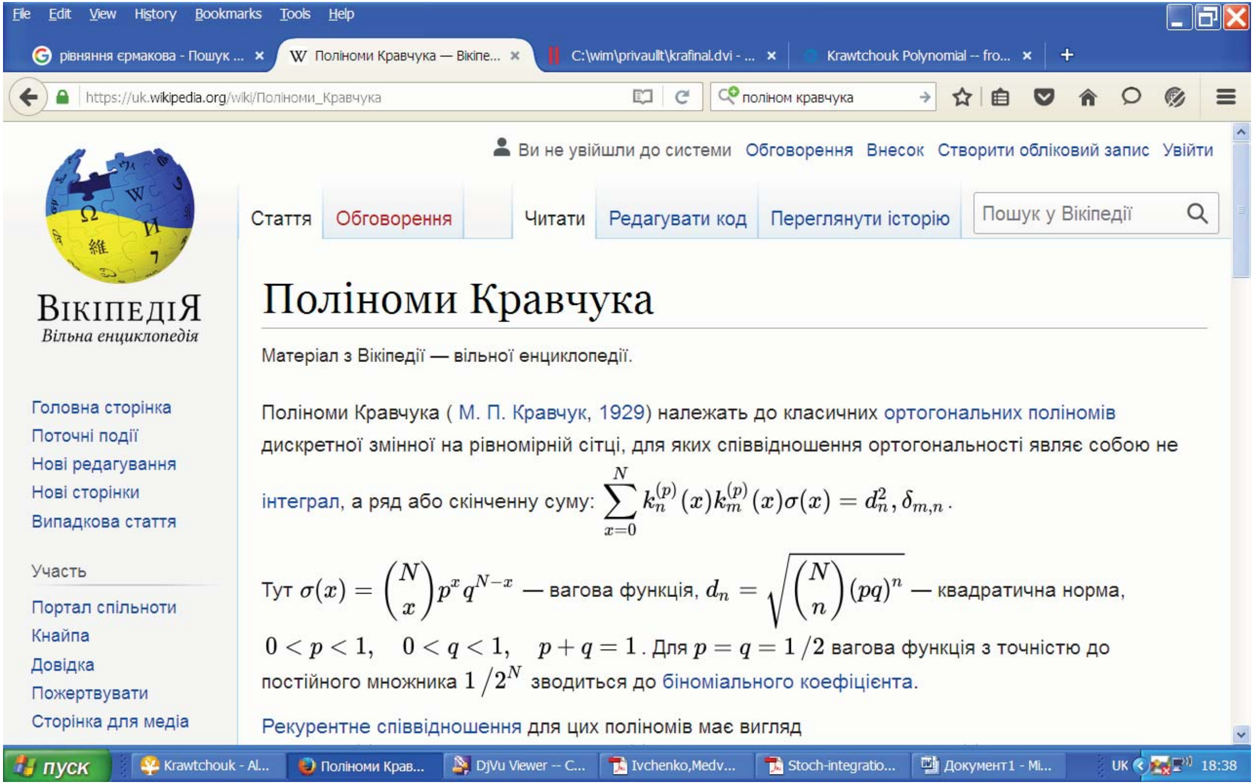
(1) теорія груп, фізика

(2) спеціальні функції, математична фізика

(3) теорія ймовірностей та математична статистика

(4) теорія кодування, теорія сигналів, теорія чисел

(5) метод моментів



File Edit View History Bookmarks Tools Help

рівняння єрмакова - Пошук ... | Поліноми Кравчука — Вікіпе... | C:\wim\privaullt\krafinal.dvi - ... | Krawtchouk Polynomial -- fro...

https://uk.wikipedia.org/wiki/Поліноми_Кравчука

Ви не увійшли до системи Обговорення Внесок Створити обліковий запис Увійти

Стаття Обговорення Читати Редагувати код Переглянути історію Пошук у Вікіпедії

Вікіпедія
Вільна енциклопедія

Головна сторінка
Поточні події
Нові редагування
Нові сторінки
Випадкова стаття

Участь

Портал спільноти
Кнайпа
Довідка
Пожертвувати
Сторінка для медіа

Поліноми Кравчука

Матеріал з Вікіпедії — вільної енциклопедії.

Поліноми Кравчука (М. П. Кравчук, 1929) належать до класичних ортогональних поліномів дискретної змінної на рівномірній сітці, для яких співвідношення ортогональності являє собою не інтеграл, а ряд або скінченну суму: $\sum_{x=0}^{N} k_n^{(p)}(x)k_m^{(p)}(x)\sigma(x) = d_n^2, \delta_{m,n}$.

Тут $\sigma(x) = \binom{N}{x} p^x q^{N-x}$ — вагова функція, $d_n = \sqrt{\binom{N}{n}(pq)^n}$ — квадратична норма, $0 < p < 1, \quad 0 < q < 1, \quad p + q = 1$. Для $p = q = 1/2$ вагова функція з точністю до постійного множника $1/2^N$ зводиться до біноміального коефіцієнта.

Рекурентне співвідношення для цих поліномів має вигляд

пуск | Krawtchouk - Al... | Поліноми Крав... | DjVu Viewer -- C... | Ivchenko,Medv... | Stoch-integratio... | Документ1 - Mi... | UK 18:38

Породжуюча функція [ред. код]

Звичайна породжуюча функція

$$(1+(q-1)z)^{n-x}(1-z)^x = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{K}_k(x;n,q)z^k.$$

Джерела [ред. код]

- *Sur une généralisation des polynomes d'Hermite*. M. Krawtchouk. C.R.Acad. Sci. 1929. T.189, No.17. P.620 — 622
- А. Ф. Никифоров, С. К. Суслов, В. Б. Уваров. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. Москва, «Наука», 1985.
- Krawtchouk Polynomials Home Page

Див. також [ред. код]

- Матриці Кравчука

п · о · р **Ортогональні поліноми**

File Edit View History Bookmarks Tools Help

рівняння ермакова - Пошук ... | On one generalization of Hermite ... | C:\wim\privault\krafinal.dvi - ... | Krawtchouk Polynomial -- fro...

https://web.archive.org/web/20070207011037/http://orthpol.narod.ru/1929.html

поліном кравчука

DES SЙANCES
DE L'ACADЙMIE DES SCIENCES

par mm. les secrйtaires perpйtuels

TOME 189

Nº 17 (21 Octobre 1929).

PARIS

ANALYSE MATHЙMATIQUE. - *SUR UNE GЙNЙRALISATION DES POLYNOMES D'HERMITE.* NOTE DE **M.KRAWTCHOUK**, TRANSMISE PAR M. ЙMILE BOREL.

C.R.ACAD. SCI. 1929. T.189, NO.17. P.620 - 622.

in French (original) | in English | in Russian

Please inform me if you can not read the texts from the links above (let me know what operational system does your computer use). Alternatively you can read the same texts as LaTeX files in French, in English or in Russian.

пуск | Krawtchouk - Al... | On one generali... | DjVu Viewer -- C... | Ivchenko,Medv... | Stoch-integratio... | Polynom-2.doc ... | UK 18:40

МИХАЙЛО КРАВЧУК

ВИБРАНІ МАТЕМАТИЧНІ ПРАЦІ

Київ — Нью-Йорк
2002

1929

DEUXIEME SEMESTRE

COMPTES RENDUS

HEBDOMADAIRES

DES SÉANCES
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

PAR MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS

TOME 189

N$^{\text{O}}$. 17 (21 Octobre 1929).

PARIS

ANALYSE MATHÉMATIQUE. - *Sur une généralisation des polynomes d'Hermite.* Note de **M.Krawtchouk**, transmise par M. Émile Borel.

M. Krawtchouk. C. R. Acad. Sci. 1929. T. 189, No. 17. P. 620–622.

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ. - *Про одне узагальнення поліномів Ерміта.* Замітка[1] **М. Кравчука**, представлена Емілем Борелем.

Нехай поліном $\psi_m(x)$ степеня m означено наступними рівностями

$$\sum_{i=o}^{u-1} p_i\psi_l(x_i)\psi_m(x_i) = o(l \neq m), \quad = 1\ (l = m)$$

$$x_{i+1} - x_i = 1, \quad p_i \geq o, \quad \sum_{i=o}^{u-1} p_i = 1. \tag{1}$$

Тоді маємо

$$\begin{cases} x\psi_m(x) = m_{-1}\psi_{m-1}(x) + m_o\psi_m(x) + m_1\psi_{m+1}(x) \\ \qquad\qquad \left[m_j = \sum_{i=o}^{u-1} p_i x_i \psi_m(x_i)\psi_{m+j}(x_i)\right] \end{cases} \tag{2}$$

й мінімум виразу

$$J_k(T_o, T_1, \ldots, T_{k-1}) = \sum_{i=o}^{u-1} p_i[T_o\psi_o(x_i) + \ldots + T_{k-1}\psi_{k-1}(x_i) - y(x_i)]^2 \quad (k \leq u) \tag{3}$$

дорівнює

$$J_k(A_o, A_1, \ldots, A_{k-1}) = \sum_{i=o}^{u-1} p_i y^2(x_i) - A_o^2 - \ldots - A_{N-1}^2$$

де

$$A_m = \sum_{i=o}^{u-1} p_i y(x_i)\psi_m(x_i). \tag{4}$$

Стор. 620

Нехай поліном $\psi_m(x)$ степеня m означено наступними рівностями

$$\sum_{i=o}^{u-1} p_i \psi_l(x_i) \psi_m(x_i) = o (l \neq m), \quad = 1 \ (l = m)$$

$$x_{i+1} - x_i = 1, \quad p_i \geq o, \quad \sum_{i=o}^{u-1} p_i = 1. \tag{1}$$

Стор. 620

Тоді маємо

$$\begin{cases} x\psi_m(x) = m_{-1}\psi_{m-1}(x) + m_o\psi_m(x) + m_1\psi_{m+1}(x) \\ \left[m_j = \sum_{i=o}^{u-1} p_i x_i \psi_m(x_i)\psi_{m+j}(x_i)\right] \end{cases} \tag{2}$$

й мінімум виразу

$$J_k(T_o, T_1, \dots, T_{k-1}) = \sum_{i=o}^{u-1} p_i [T_o \psi_o(x_i) + \dots + T_{k-1}\psi_{k-1}(x_i) - y(x_i)]^2 \quad (k \le u) \tag{3}$$

дорівнює

$$J_k(A_o, A_1, \dots, A_{k-1}) = \sum_{i=o}^{u-1} p_i y^2(x_i) - A_o^2 - \dots - A_{N-1}^2$$

де

$$A_m = \sum_{i=o}^{u-1} p_i y(x_i) \psi_m(x_i). \tag{4}$$

Стор. 621

У важливому випадку $p_o = p_1 = \ldots = p_{u-1}$, вивченому Чебишовим, поліноми ψ_m є узагальненням поліномів Лежандра. Ми хочемо розглянути інший важливий випадок, у якому

$$p_i = P(i, u; p, q) = \binom{u-1}{i} p^i q^{u-1-i}, \quad x_i = i \quad (p > o,\ q > o,\ p + q = 1). \tag{5}$$

Стор. 621

Можна довести, що функції ψ_m мають у цьому випадку наступну просту форму

$$\varphi_m(x,u;p,q)=\sqrt{\binom{u-1}{m}(pq)^m}\,\Delta^m P(x-m,u-m;p,q), \tag{6}$$

$$P(x,u;p,q)=\sqrt{\binom{u-1}{m}^{-1}}(pq)^{-m}\sum_{i=o}^{m}(-1)^i\binom{u-x-1}{m-i}\binom{x}{i}p^{m-i}q^i$$

для поліномів

$$\text{const.}\frac{x!}{a^x}\Delta^m\left[\frac{a^{x-m}}{(x-m)!}\right]\quad(u\to\infty),\ p(u-1)=a=\text{const.}) \tag{7}$$

та поліномів Ерміта

$$\text{const.}e^{t^2}\frac{d^m}{dt^m}\left(e^{-t^2}\right)\quad\left[u\to\infty,\ x=p(u-1)+t\sqrt{2pq(u-1)}\right]. \tag{8}$$

Стор. 622

Додатки. — 1. Обчислення *неповних узагальнених моментів*

$$R_m(x) = \sum_{i=o}^{x-1} P(i, u; p, q)\varphi_m(i, u; p, q) \quad (m = 1, 2, \ldots, k)$$

– 2. Варто відзначити наступне розвинення

$$P(x,u_1;p_1,q_1) = P(x,u;p,q)\sum_{m=0}^{u-1}\sqrt{\frac{(u-m-1)!}{m!(u-1)!}(pq)^{-m}}\varphi_m(x,u;p,q)$$
$$\times\sum_{i=o}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}p^{m-i}q^i\left[\frac{d^m[s^{u-m}(p_1t+q_1s)^{u_1}]}{dt^i\,ds^{m-i}}\right]_{s,t=1}$$
$$(u\geq u_1),$$

граничні випадки якого відповідають поліномам (7) та (8) ї є добре відомими.

Оригінальна стаття: стор. 620

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une généralisation des polynomes d'Hermite.* Note [2] de M. **Krawtchouk**, transmise par M. Émile Borel.

Soit $\psi_m(x)$ le polynome de $m^{\text{ième}}$ degré déterminé par les égalités suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} p_i \psi_l(x_i)\psi_m(x_i) = 0 \quad (l \neq m), \quad = 1 \quad (l = m) \\ \qquad\left(x_{i+1} - x_i = 1,\ p_i \geqq 0,\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} p_i = 1\right). \end{array}\right.$$

(1) F. Riesz, *Ueber Systeme integrierbarer Funktionen* (*Mathematische Annalen*, 69, 1911, p. 449-497, 456).

(2) Séance du 23 septembre 1929.

Alors on a

$$(2)\quad \begin{cases} x\,\psi_m(x) = m_{-1}\,\psi_{m-1}(x) + m_0\,\psi_m(x) + m_1\,\psi_{m+1}(x) \\ \left[m_j = \sum_{i=0}^{u-1} p_i x_i\,\psi_m(x_i)\,\psi_{m+j}(x_i) \right] \end{cases}$$

et le minimum de l'expression

$$(3)\quad \mathfrak{I}_k(T_0, T_1, \ldots, T_{k-1}) = \sum_{i=0}^{u-1} p_i[T_0\,\psi_0(x_i) + \ldots + T_{k-1}\,\psi_{k-1}(x_i) - y(x_i)]^2 \qquad (k \leqq u)$$

est égal à

$$\mathfrak{I}_k(A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}) = \sum_{i=0}^{u-1} p_i y^2(x_i) - A_0^2 - \ldots - A_{k-1}^2,$$

Оригінальна стаття: стор. 622

Applications. — 1. L'évaluation des *moments généralisés incomplets*

$$R_m(x) = \sum_{i=0}^{x-1} P(i, u; p, q)\,\varphi_m(i, u; p, q) \qquad (m = 1, 2, \ldots, k)$$

de la fonction (5) est immédiate :

$$(10) \qquad R_m(x) = \sqrt{\binom{u-1}{m}(pq)^m}\,.\,\Delta^{m-1}P(x-m, u-m; p, q) \qquad (m=1, 2, \ldots, k).$$

Quant au moment $k^{-\text{ième}}$ incomplet factoriel

$$\rho_k(x) = \sum_{i=0}^{x-1} P(i, u; p, q)\,.\binom{p(u-1)-x}{k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

ЗАПИСКИ

КИЇВСЬКОГО СІЛЬСЬКО-ГОСПОДАРСЬКОГО ІНСТИТУТУ

Том IV

Рік 1929

З М І С Т.

Проф. М. Кравчук.

ПРО ІНТЕРПОЛЯЦІЮ З ДОПОМОГОЮ ОРТОГОНАЛЬНИХ МНОГОЧЛЕНІВ.

П. Чебишов кількома нападами розбирав задачу параболічної інтерполяції способом найменших квадратів із допомогою ортогональних многочленів [1]). Джерелом його дослідів була теорія алгебричних ступанкових дробів. Свої загальні формули він особливо пристосував до практичних рахунків у частиннім випадку, коли всі дані вартості інтерпольованої функції мають однакову вагу і є рівновіддалені.

У цій розвідці коротко подано висліди Чебишова незалежно від теорії ступанкових дробів і докладніше розглянено згаданий частинний випадок та другий — коли вага даних вартостей інтерпольованої функції змінюється згідно з законом біноміяльного розподілу ймовірностей. Перший випадок привів Чебишова до взагальнення Legendre'овиx многочленів; другий дає взагальнення многочленів Hermite'овиx.

1.

Нехай дано якісь вартості незалежного змінного x:

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1},$$

M. Krawtchouk.

Sur l'interpolation au moyen des polynômes orthogonaux.

Dans cet article il est demontré entre autres le résultat suivant. Les polynômes

$$\psi_m(x) = \frac{\sqrt{\binom{n-1}{m}(pq)^m}\,\Delta^m\left[\binom{n-m-1}{x-m}p^{x-m}q^{n-x-1}\right]}{\binom{n-1}{x}p^x q^{n-1-x}} \qquad (m = 0, 1, \ldots, n-1),$$

alors les fonctions $\psi_m(x)$ deviendront les polynômes d'Hermite:

$$\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{m!}}\cdot\frac{d^m}{dt^m}e^{-\frac{t^2}{2}}$$

29.XII.1928.

M. Krawtchouk.

Sur l'interpolation au moyen des polynômes orthogonaux.

Dans cet article il est demontré entre autres le résultat suivant. Les polynômes

$$\psi_m(x) = \frac{\sqrt{\binom{n-1}{m}(pq)^m}\,\Delta^m\left[\binom{n-m-1}{x-m}p^{x-m}q^{n-x-1}\right]}{\binom{n-1}{x}p^x q^{n-1-x}} \qquad (m=0,1,\ldots,n-1),$$

alors les fonctions $\psi_m(x)$ deviendront les polynômes d'Hermite:

$$\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{m!}}\cdot\frac{d^m}{dt^m}e^{-\frac{t^2}{2}}$$

29.XII.1928.

Оригінальна стаття: стор. 620

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une généralisation des polynomes d'Hermite.* Note (²) de M. **Krawtchouk**, transmise par M. Émile Borel.

Soit $\psi_m(x)$ le polynome de $m^{\text{ième}}$ degré déterminé par les égalités suivantes :

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} p_i \psi_l(x_i)\psi_m(x_i) = 0 \;\; (l \neq m), \quad = 1 \;\; (l = m) \\ \displaystyle\qquad \left(x_{i+1} - x_i = 1,\; p_i \geqq 0,\; \sum_{i=0}^{n-1} p_i = 1 \right). \end{array} \right.$$

(¹) F. Riesz, *Ueber Systeme integrierbarer Funktionen* (*Mathematische Annalen*, 69, 1911, p. 449-497, 456).

(²) Séance du 23 septembre 1929.

Про ортогональні многочлени, зв'язані зі схемами повернених та неповернених куль.

Академіка М. Кравчука.

Доповіджено 21 лютого 1930 р.

Sur les polynômes orthogonaux liés avec les schémas de Bernoulli et de C. Pearson.

Par M. Krawtchouk, membre de l'Académie.

Présenté le 21 février 1930.

§ 1.

Поодинокі члени біноміяльного розвинення

$$(p+q)^{u-1}=\binom{u-1}{0} q^{u-1}+\binom{u-1}{1} p q^{u-2}+\ldots+\binom{u-1}{x} p^{x} q^{u-1-x}+\ldots+\binom{u-1}{u-1} p^{u-1},$$

де

$$p>0,\ q>0,\ p+q=1,$$

L'enseignement Mathématique, 1933, vol. 25, 74–77

NOTE SUR LA DISTRIBUTION DES RACINES DES POLYNOMES DÉRIVÉS

M. Krawtchouk (Kieff).

Théorème I. *Soient* B *et* Γ *deux cercles, l'un à l'intérieur de l'autre, sur le plan de la variable complexe* ζ; *soit de plus* n *le rapport de similitude de ces cercles,* α *leurs centres de similitude et* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ *quelques points en dehors de* Γ; *alors on a,*

$$\frac{1}{\beta - \alpha} + \frac{1}{\beta - \alpha_1} + \ldots + \frac{1}{\beta - \alpha_{n-1}} \neq 0 \,. \tag{1}$$

pour tout point β, *intérieur de* B.

Породжуюча функція [ред. код]

Звичайна породжуюча функція

$$(1+(q-1)z)^{n-x}(1-z)^x = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{K}_k(x;n,q)z^k.$$

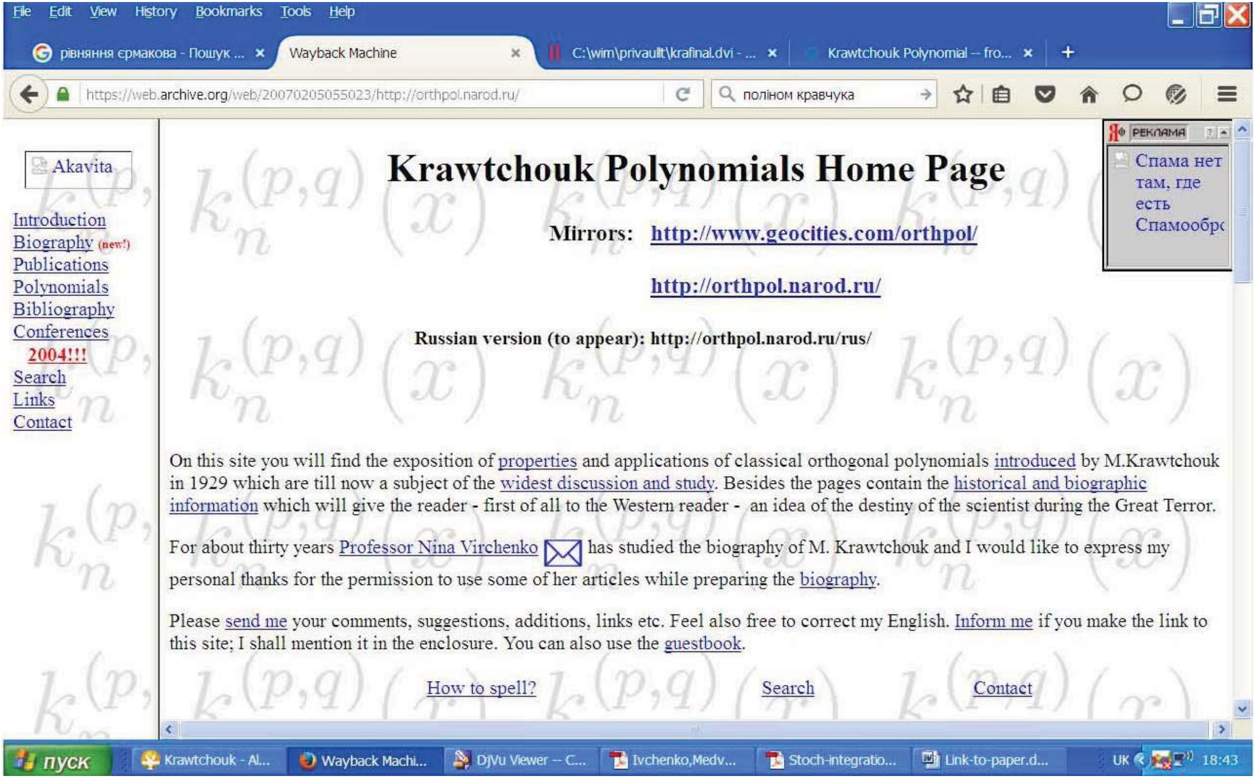
Джерела [ред. код]

- *Sur une généralisation des polynomes d'Hermite*. M. Krawtchouk. C.R.Acad. Sci. 1929. T.189, No.17. P.620 — 622
- А. Ф. Никифоров, С. К. Суслов, В. Б. Уваров. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. Москва, «Наука», 1985.
- Krawtchouk Polynomials Home Page

Див. також [ред. код]

- Матриці Кравчука

п · о · р **Ортогональні поліноми**



Krawtchouk Polynomials Home Page

Introduction
Biography (new!)
Publications
Polynomials
Bibliography
Conferences
2004!!!
Search
Links
Contact

Mirrors: http://www.geocities.com/orthpol/

http://orthpol.narod.ru/

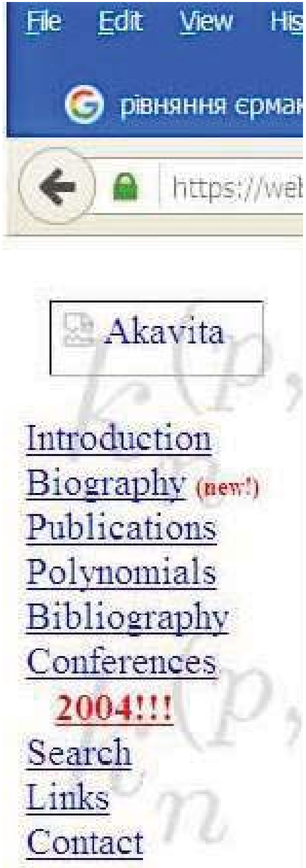
Russian version (to appear): http://orthpol.narod.ru/rus/

On this site you will find the exposition of properties and applications of classical orthogonal polynomials introduced by M.Krawtchouk in 1929 which are till now a subject of the widest discussion and study. Besides the pages contain the historical and biographic information which will give the reader - first of all to the Western reader - an idea of the destiny of the scientist during the Great Terror.

For about thirty years Professor Nina Virchenko has studied the biography of M. Krawtchouk and I would like to express my personal thanks for the permission to use some of her articles while preparing the biography.

Please send me your comments, suggestions, additions, links etc. Feel also free to correct my English. Inform me if you make the link to this site; I shall mention it in the enclosure. You can also use the guestbook.

How to spell? Search Contact


File Edit View His
рівняння єрмак
https://web
Akavita
Introduction
Biography (new!)
Publications
Polynomials
Bibliography
Conferences
2004!!!
Search
Links
Contact

ВЛАСТИВОСТІ

ПОЛІНОМІВ

М. П. КРАВЧУКА

Де зустрічаються поліноми Кравчука

(1) математичний аналіз

(2) теорія ймовірностей

(3) комбінаторний аналіз

(4) аналіз булевих функцій

(5) криптографія

(6) захист інформації

(7) теорія кодування

Еквівалентні означення поліномів Кравчука: $x \in \mathbf{N}$

$$\mathscr{K}_k^{(1)}(x;m) = \sum_j (-1)^{k-j} \binom{x}{j} \binom{n-x}{k-j} p^{k-j} q^j,$$

$$\mathscr{K}_k^{(2)}(x;m) = \binom{n}{k}^{-1/2} (pq)^{-1/2} \mathscr{K}_k^{(1)}(x;m),$$

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$$

Частковий випадок $p = q = \frac{1}{2}$

$$\mathscr{K}_k^{(3)}(x;n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-k/2} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{x}{j} \binom{n-x}{k-j},$$

$$\mathscr{K}_k\,(x;n) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{x}{j} \binom{n-x}{k-j}$$

Умова ортогональності: 1

$$\sum_{x=0}^{n} \mathscr{K}_k(x;n)\,\mathscr{K}_l(x;n) = 2^n \delta_{k,l},$$

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

Умова ортогональності: 2

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{x}{n} \mathscr{K}_k\left(x;n\right) \mathscr{K}_l\left(x;n\right) = \binom{n}{k} 2^{-k} \delta_{k,l},$$

Обчислення біноміальних ймовірностей

$$b(x;n,p) \stackrel{\text{def}}{=} \binom{n}{x} p^x q^{n-x},$$

ймовірність x успіхів у n випробуваннях Бернуллі

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1-p}{2},$$

$$\boxed{b(x;n,p) = \binom{n}{x} 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \mathscr{K}_k\,(x;n)\,\delta^k}$$

Рекурентне співвідношення: 1

$$(k+1)\mathscr{K}_{k+1}(x;n) \\ = (n-2x)\mathscr{K}_k(x;n) - (n-k+1)\mathscr{K}_{k-1}(x;n),$$

$$\mathscr{K}_0(x;n) = 1,$$

$$\mathscr{K}_1(x;n) = n - 2x$$

Рекурентне співвідношення: 2

$$
\begin{aligned}
(n-x)\mathscr{K}_k(x+1;n) \\
&= (n-2k)\mathscr{K}_k(x;n) - x\mathscr{K}_k(x-1;n),
\end{aligned}
$$

$$\mathscr{K}_k(0;n) = \binom{n}{k},$$

$$\mathscr{K}_k(1;n) = \left(1-\frac{2k}{n}\right)\binom{n}{k}$$

Подібність до поліномів Ерміта

$$H_{k+1}(x) = 2xH_k(x) - 2kH_{k-1}(x),$$
$$H_0(x) = 1, \qquad H_1(x) = 2x;$$

$$\begin{aligned}(k+1)\mathscr{K}_{k+1}(x;n) = (n-2x)\mathscr{K}_k(x;n) \\ - (n-k-1)\mathscr{K}_{k-1}(x;n),\end{aligned}$$
$$\mathscr{K}_0(x;n) = 1, \qquad \mathscr{K}_1(x;n) = n-2x$$

Якщо k та x є фіксованими

$$\mathscr{K}_{k+1}\left(x; \frac{n-\sqrt{2nx}}{2}\right)$$

$$= \frac{n^{k/2}}{k!2^{k/2}} H_k(x) + O\left(n^{k/2-1}\right).$$

Розклад Кравчука довільного поліному

$$R(x) = \sum_{k=0}^{t} a_k \mathscr{K}_k\,(x;n)\,,$$

$$a_k = 2^{-n} \sum_{l=0}^{k} R(l) \mathscr{K}_l\,(k;n)\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, t.$$

a_k — коефіцієнти Кравчука

Корені поліномів Кравчука

(1) всі корені поліному $\mathscr{K}_k(x;n)$ є дійсними: $0 < x_1 < \cdots < x_k < n$,

$$x_i + x_{k+1-i} = n;$$

$i = 1, \ldots, k$

$$x_{i+1} - x_i > 2;$$

$k < \frac{n}{2}$

Корені поліномів Кравчука

(2) корені $\mathscr{K}_{k-1}(y;n)$ та $\mathscr{K}_k(x;n)$ чергуються:

$$0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots$$
$$< x_{k-1} < y_{k-1} < x_k < n;$$

(3) мають місце співвідношення

$$\sum_{1\le i<j\le k} x_i x_j = \frac{k(k-1)}{24}(3n(n-1)+2(k-2)),$$

$$\sum_{1\le i<j\le k} (x_i - x_j)^2 = \frac{k^2(k-1)}{12}(3n-2k+4).$$

Найменший корінь поліному Кравчука

$$x_1 = \frac{n}{2} - \max_{s_0,\ldots,s_{k-1}} \left\{ \sum_{i=0}^{k-2} s_i s_{i+1} \sqrt{(i+1)(n-i)} \right\},$$

$$s_0^2 + \cdots + s_{k-1}^2 = 1.$$

Апроксимація коренями поліному Ерміта

k — фіксоване, $i = 1, \ldots, k$:

$$x_i = \frac{n}{2} + h_i \frac{\sqrt{n-k-1}}{2}(1 + o(1)),$$

$$n \to \infty$$

Цілі корені поліному Кравчука

N_k — кількість цілих коренів $\mathscr{K}_k(x; n)$.

Якщо n парне, а k непарное, то

$$\frac{n}{2} \text{ — цілий корінь}$$

тривіальний корінь

Досі нерозв'язана задача

Чи для кожного поліному Кравчука існують нетривіальні цілі корені?

Нетривіальні корені для часткових випадків

k	n	корінь
5	36	14
23	67	31
19	132	62
84	576	286
798	8361	4178

Оцінка у загальному випадку

$$\boxed{N_k \leq \min\{k, n - 2k\}}$$

якщо $n - 2k > 0$

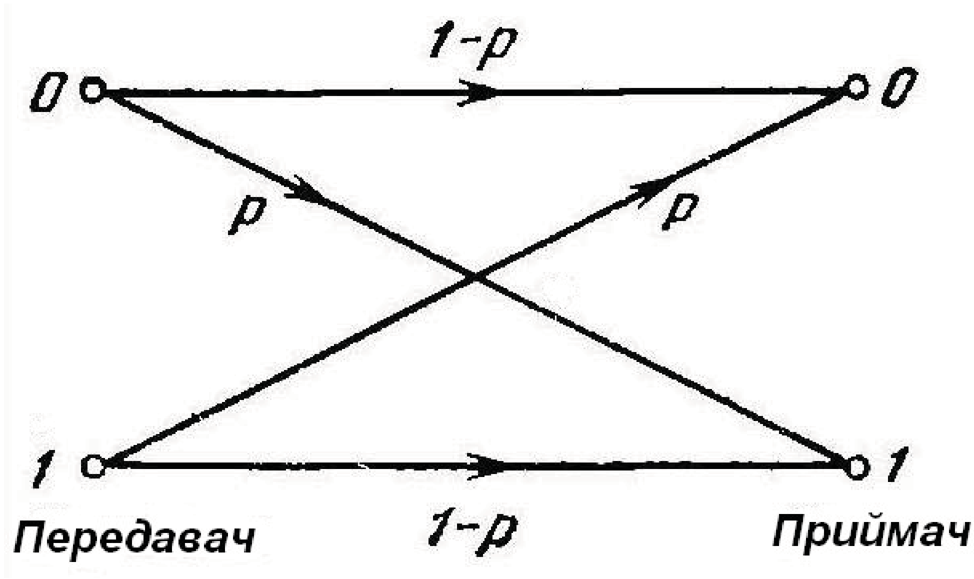
ПОЛІНОМИ

М. П. КРАВЧУКА

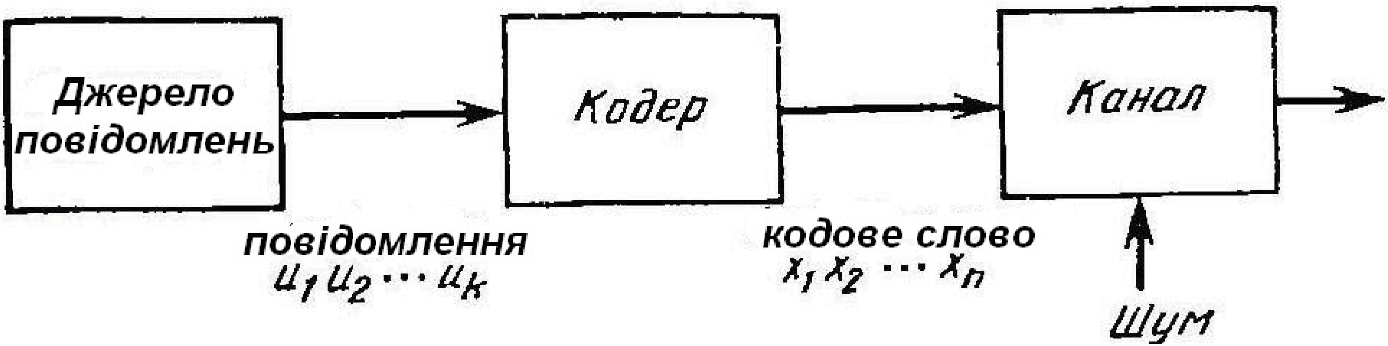
У ТЕОРІЇ КОДУВАННЯ

Одна з доповідей на конференції Кравчука

В. С. Королюк, В. В. Строк (2004), *Многочлены Кравчука в алгебраической теории кодов*, `Міжнародна конференція, присв'ячена академіку М. П. Кравчуку`, тези доповідей, Інститут математики НАН України, Київ, 1992, стор. 96


1-p
0
0
p
p
1
1
Передавач
1-p
Приймач

Процес кодування



Лінійний код: 1

$$u_1 \ldots u_k \longrightarrow x_1 \ldots x_n,$$

$$x_1 = u_1, \ldots, x_k = u_k,$$

$$\underbrace{x_{k+1} \ldots x_n}_{\text{перевірочні коди}}$$

Лінійний код: 2

$$H$$

перевірочна матриця

$$H \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{\operatorname{mod} 2}{=} 0$$

Код парності: $k = 3$, $n = 4$

$$u_1 u_2 u_3 \longrightarrow u_1 u_2 u_3 x_4,$$

$$x_4 = u_1 + u_2 + u_3,$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

Код парності: $k = 3$, $n = 4$

$$u_1u_2u_3 \longrightarrow u_1u_2u_3x_4,$$

$$x_4 = u_1 + u_2 + u_3,$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Код парності: $k = 3$, $n = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \overset{\mathrm{mod}\, 2}{\Longleftrightarrow} x_4 = x_1 + x_2 + x_3$$

Кількість кодових слів

$$u_1 \ldots u_k \longrightarrow u_1 \ldots u_k x_{k+1} \ldots x_n$$

Кількість кодових слів

$$\underbrace{u_1 \ldots u_k}_{2^k} \longrightarrow u_1 \ldots u_k x_{k+1} \ldots x_n$$

Кількість кодових слів

$$\underbrace{u_1 \ldots u_k}_{2^k} \longrightarrow \underbrace{u_1 \ldots u_k x_{k+1} \ldots x_n}_{2^k}$$

Відстань Хемінга

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{0, 1\}^n$$

$$d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{кількість } i\colon x_i \neq y_i$$

Відстань Хемінга: приклад

$$\mathbf{x} = 0000, \qquad \mathbf{y} = 1111$$

$$d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4$$

Мінімальна відстань між словами у коді

$$\min d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

(обчислюється за всьома кодовими словами)

Виправлення помилок

Theorem 1. *Код з мінімальною відстанню між словами* d *може виправити*

$$\left[\frac{d-1}{2}\right]$$

помилок.

Максимально можлива кількість кодових слів

$A(n, d)$ $-$ максимально можлива кількість кодових слів у бінарному коді довжини n з мінімальною відстанню між словами d

Оцінка Варшамова–Гілберта

$$A(n,d) \le \binom{n}{k} \frac{n-k-(k+1)Q_{k,n}(a)}{-2a(k+1)Q_{k,n}(a)},$$

$$Q_{k,n}(a) = \frac{\mathscr{K}_{k+1}(a;n)}{\mathscr{K}_{k}(a;n)},$$

$$x_{1;k+1,n} < a < x_{1;k,n}$$

Досконалі коди: означення

$$V_n \stackrel{\text{def}}{=} \{0,1\}^n, \qquad C \subseteq V_n \quad - \quad \text{код;}$$

Означення r-досконалого коду

$$\bigcup_{\boldsymbol{x}\in C} \mathrm{B}_r(\boldsymbol{x}) = V_n, \qquad \mathrm{B}_r(\boldsymbol{x}) \cap \mathrm{B}_r(\boldsymbol{y}) = \varnothing$$

$\mathrm{B}_r(\boldsymbol{x})$ — куля радіуса r з центром $\boldsymbol{x}$

Досконалі коди: властивість

Theorem 2. *Кожен r-досконалий код може виправити не більше r помилок, але не може виправити $r+1$ помилок.*

Чи існують досконалі коди?

Відповідь залежить від властивостей нулів поліномів Кравчука

Чи існують досконалі коди?

Theorem 3. *Якщо полином* $\mathscr{K}_r(x; n)$ *має хоча б один нецілий корінь, то в* V_{n+1} *не існує* r*-досконалого коду.*

Якими є умови того, що поліном Кравчука має нецілі корені?

Відкрите питання

Якими є умови того, що поліном Кравчука не має цілих коренів?

Випадки, коли цілі корені відомі

$$n = 3,$$

$$n = 4,$$

$$n = 5,$$

$$n = 6,$$

$$n = 7$$

Спектр коду

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \;=\; \text{кодове слово,}$$

бінарний вектор

$$w(\boldsymbol{x}) \;=\; \text{кількість } i \text{ для яких } x_i = 1,$$

вага вектора $\boldsymbol{x}$

$$(A_0, A_1, \ldots, A_n) \;=\; \text{спектр коду,}$$

$$A_i \;=\; \text{кількість кодових слів ваги } i$$

Перетворення Мак-Вільямс

$$(A_0, A_1, \ldots, A_n) \longrightarrow (A'_0, A'_1, \ldots, A'_n),$$

$$A'_i = \sum_{j=0}^{n} A_j \mathscr{K}_k\,(j; n)\,, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Твердження.

$(A'_0, A'_1, \ldots, A'_n)$ визначає *дуальний* код.

Потужність коду

L – код;

d – мінімальна відстань між кодовими

словами коду L;

S – кількість кодових слів в L

потужність коду L

Оцінка потужності коду

Theorem 4 (Lloyd).

$$S \leq 2^n \left(\sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i} \right)^{-1}, \qquad t \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{d-1}{2} \right].$$

Крім цього,

$$S = 2^n \left(\sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i} \right)^{-1}, \qquad t \overset{\text{def}}{=} \left[\frac{d-1}{2} \right]$$

тоді і тільки тоді, коли

поліном Ллойда має t *різних коренів у множині* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Поліном Ллойда коду

$$\mathscr{L}(x) = \sum_{k=0}^{t} \mathscr{K}_k(x;n) = \underset{\text{поліном Кравчука}}{\mathscr{K}_t(x-1;n-1)},$$

$$t \overset{\text{def}}{=} \left[\frac{d-1}{2}\right].$$