Тестова частина

1. Обчисліть $\dfrac{3+3^2+...+3^{2021}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{3^{2021}}}$.

Розв'язання.

$$\frac{3+3^2+...+3^{2021}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{3^{2021}}}=\frac{3(1+3+...+3^{2020})}{\dfrac{3^{2020}+3^{2019}+...+1}{3^{2021}}}=3\cdot 3^{2021}=3^{2022}$$

Відповідь: 3^{2022} .

2. Студент КПІ піднімається нагору східцями нерухомого ескалатора за 90 с. Коли ескалатор працює, студент піднімається нагору, стоячи нерухомо, за 60 с. За який час t він вийде нагору по рухомому ескалатору?

Розв'язання.

Швидкість студента позначимо v_1 , швидкість ескалатора позначимо v_2. Тоді

$90v_1 = 60v_2$ або $v_2 = \dfrac{3}{2}v_1$. Звідси $90v_1 = t(v_2 + v_1)$ або

$90v_1 = t(\dfrac{3}{2}v_1 + v_1) \Rightarrow t = {}^{90}\!\Big/\!{}_{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow t = 36$

Відповідь: $t = 36\,c$

3. При яких натуральних n вираз $A=\dfrac{3n^2+3n-8}{n+1}$, $n \in N$ набуває натуральних значень? Вкажіть значення n, при якому A найбільше натуральне.

Розв'язання.

$$\frac{3n^2+3n-8}{n+1}=\frac{3n\left(n+1\right)-8}{n+1}=3n-\frac{8}{n+1}.$$

Останній вираз набуває натуральних значень, коли $n = 3;7$. Найбільшого натурального значення A набуває, коли $n = 7$, відповідно $A = 20$.

4. За яких значень x числа $a_1 = \lg 4,\ a_2 = \lg(9^x + 5),\ a_3 = \lg(9^x + 13)$ утворюють арифметичну прогресію? Чому дорівнює різниця прогресії d ?

Розв'язання.

За властивостями арифметичної прогресії $a_1 + a_3 = 2a_2$

$$\lg 4 + \lg(9^x + 13) = 2\lg(9^x + 5) \Leftrightarrow \lg 4(9^x + 13) = \lg(9^x + 5)^2 \Rightarrow$$

$$4 \cdot 9^x + 52 = 9^{2x} + 10 \cdot 9^x + 25 \Leftrightarrow 9^{2x} + 6 \cdot 9^x - 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9^x = 3 \\ 9^x = -9 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$d = a_2 - a_1 \Rightarrow \lg(3 + 5) - \lg 4 = \lg\frac{8}{4} = \lg 2 \ .$$

Відповідь: $x = \frac{1}{2}, \quad d = \lg 2$.

5. Яка найменша кількість учасників може бути в математичному гуртку, якщо дівчат в ньому менше 50% але більше 40%? Скільки в цьому гуртку дівчат?

Відповідь: учасників 7; дівчат 3.

Письмова частина

6. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{12-x-x^2}\left(6x^2+15\left|x+2\right|-20\left|x\right|-17x-18\right)\geq 0$.
Вкажіть кількість цілих розв'язків.

Розв'язання.

ОДЗ: $12-x-x^2\geq 0 \Rightarrow x\in\left[-4;3\right]$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2\\6x^2-15x-30+20x-17x-18\geq 0\end{cases}\\\begin{cases}-2\leq x<0\\6x^2+15x+30+20x-17x-18\geq 0\end{cases}\\\begin{cases}x\geq 0\\6x^2+15x+30-20x-17x-18\geq 0\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2\\x^2-2x-8\geq 0\end{cases}\\\begin{cases}-2\leq x<0\\x^2+3x+2\geq 0\end{cases}\\\begin{cases}x\geq 0\\3x^2-11x+6\geq 0\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow$$

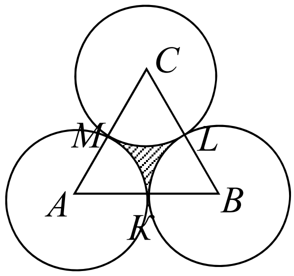
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2\\x\leq -2\cup x\geq 4\end{cases}\\\begin{cases}-2\leq x<0\\x\leq -2\cup x\geq -1\end{cases}\\\begin{cases}x\geq 0\\x\leq \frac{2}{3}\cup x\geq 3\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\left(-\infty;-2\right)\\x\in\left\{-2\right\}\cup\left[-1;0\right)\\x\in\left[0;\frac{2}{3}\right]\cup\left[3;+\infty\right)\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in\left(-\infty;-2\right]\cup\left[-1;\frac{2}{3}\right]\cup\left[3;+\infty\right).$$

З урахуванням ОДЗ отримаємо відповідь.

Відповідь: $x\in\left[-4;-2\right]\cup\left[-1;\frac{2}{3}\right]\cup\left\{3\right\}$, кількість цілих розв'язків 6.

7. Довжина сторони рівностороннього трикутника ABC дорівнює 6. Точки K, L, M- середини його сторін. Знайдіть площу S заштрихованої області.



Розв'язання.

Площа трикутника ABC дорівнює $S_\Delta = \dfrac{\sqrt{3}}{4}6^2 = 9\sqrt{3}$;

площа сектора MAK дорівнює площам секторів MCL, LBK : $S_{сек} = \left[\dfrac{\pi R^2 \alpha}{360}\right] = \dfrac{3}{2}\pi$.

Площа заштрихованої області $S = S_\Delta - 3S_{сек}$ $S = 9\sqrt{3} - \dfrac{9}{2}\pi = 9(\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2})$.

Відповідь: $9(\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2})$.

8. Розв'яжіть рівняння $\dfrac{2}{a2^x - 1} = a - 2$ для кожного значення параметра a.

Розв'язання:

при $a = 0$, $\dfrac{2}{-1} = -2 \Rightarrow x \in R$;

при $a > 2$, $a2^x - 1 = \dfrac{2}{a-2} \Rightarrow x = \log_2 \dfrac{1}{a-2}$;

при $a < 2$, $a \neq 0$, $2^x = \dfrac{1}{a-2} < 0$, що неможливо, отже $x \in \varnothing$;

при $a = 2$ $\dfrac{2}{2^{x+1} - 1} = 0$, що неможливо, отже $x \in \varnothing$.

9. Відомо, що $x_1 -$ точка максимуму, $x_2 -$точка мінімуму функції $f(x) = 2x^3 - 9mx^2 + 12m^2x + 1$. Для якого значення m виконується рівність $x_1{}^2 = x_2$?

Розв'язання.

$f'\left(x\right) = 6x^2 - 18mx + 12m^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3mx + 2m^2 = 0 \Rightarrow D = m^2 \Rightarrow x = \left[\begin{array}{l} 2m, \\ m \end{array}\right.$

Якщо $m > 0$, $x_1 = m$, $x_2 = 2m \Rightarrow m^2 = 2m \Rightarrow m = 2$

Якщо $m < 0$, $x_1 = 2m$, $x_2 = m \Rightarrow 4m^2 = m$ – рівність неможлива

Якщо $m = 0$, то функція $f(x)$ зростає та не має екстремумів.

Відповідь: $m = 2$.

10. Знайдіть всі дійсні значення x та y, для яких вираз

$A = 5\cos(\sqrt{\pi^2 - |\ y\ |}\cos\frac{\pi x}{2})$ набуває найменшого значення?

Розв'язання.

Проаналізуємо вираз $\sqrt{\pi^2 - |\ y\ |}\cos\frac{\pi x}{2}$. Оскільки функція $\cos\frac{\pi x}{2}$ набуває значень від -1 до 1 : $-1 \le \cos\frac{\pi x}{2} \le 1$, а $0 \le \sqrt{\pi^2 - |\ y\ |} \le \pi$, то добуток $\sqrt{\pi^2 - |\ y\ |}\cos\frac{\pi x}{2}$ змінюється від $-\pi$ до π:

$$-\pi \le \sqrt{\pi^2 - |\ y\ |}\cos\frac{\pi x}{2} \le \pi.$$

Причому крайні значення $\pm\pi$ досягаються, коли $y = 0$ і $\cos\frac{\pi x}{2} = \pm 1$. Тоді найменше значення виразу $A = 5\cos(\sqrt{\pi^2 - |\ y\ |}\cos\frac{\pi x}{2}) = -5$.

Розв'язками рівняння $\cos\frac{\pi x}{2} = \pm 1$ будуть

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi x}{2} = 2\pi n,\ \ n \in Z \\ \frac{\pi x}{2} = \pi + 2\pi k,\ \ k \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4n,\ \ n \in Z \\ x = 2 + 4k,\ \ k \in Z \end{array}\right.$$

Відповідь: $y = 0,\ x = 4n\ \ x = 2 + 4k,\ \ k, n \in Z$ **.**